

АРЕОЛАРНА ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА И ЕДНА НЕЈЗИНА ПРИМЕНА
ЗА РЕШАВАЊЕ НА АРЕОЛАРНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Борко Илиевски

Во првиот дел од оваа работа се проучени егзистенцијата и некои својства на ареоларната лапласова трансформација L_A , воведена во трудот [1], за потоа да се дефинира и инверзна лапласова трансформација L_A^{-1} .

Во вториот дел од работата е укажано на една интересна можност за примена на L_A и L_A^{-1} врз решавање ареоларни линеарни диференцијални равенки, коишто се третирали во голем број трудови како на пример во [2], [3] и др. Имено, сметајќи дека решението $w=w(z, \bar{z})$ на ареоларната линеарна равенка (15) е слика на некоја функција - оригинал $\omega=\omega(z, t)$ со комплексен параметар z и, применувајќи ја прво инверзната трансформација L_A^{-1} над (15), се наоѓа ω за потоа со примена над ω на трансформацијата L_A да се добие решението W на споменатата ареоларна линеарна равенка.

Комплексна функција f од реална променлива t ($t > 0$) се вика оригинал, ако се исполнети условите:

1° f заедно со своите изводи до n -ти ред се по делови непрекинати,

$$2^\circ f(t) = 0 \text{ за } t < 0,$$

3° постојат реални броеви $M > 0$ и $s > 0$, така што

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Пресликувањето $L: f(t) \rightarrow F(z)$, дефинирано со равенството

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = F(z), \quad (ze \in \mathbb{C}), \quad (1)$$

се вика лапласова трансформација.

Функцијата $F=F(z)$ се вика лапласова слика на $f=f(t)$, а интегралот во (1) се вика лапласов интеграл.

Познато е дека лапласовата слика F на функцијата оригинал f е определена и аналитична функција од z во полурамнината $\operatorname{Re} z \geq a > s$ [4].

Во работата [1] е дефинирана т.н. ареоларна лапласова трансформација преку равенството

$$L_A(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dz = F_A(z) \quad (2)$$

$F_A = F_A(z)$ се вика ареоларна лапласова слика на f , а интегралот во (2) ареоларен лапласов интеграл.

Од (1) и (2) се добива врската

$$F_A(z) = F(\bar{z}) \quad (3)$$

што постои помеѓу лапласовата слика F и ареоларната лапласова слика F_A на една иста функција f .

Теорема 1. Ако f е функција оригинал, тогаш ареоларниот лапласов интеграл (2) конвергира во полурамнината $\{z: \text{Re} z \geq a > s\}$.

Доказ.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-\bar{z}t}| \cdot |f(t)| dt < \\ &< \int_0^{\infty} |e^{-(x-iy)t}| M e^{st} dt = M \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{st} dt \leq \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-at} e^{st} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(a-s)t} dt = \\ &= M \cdot \left[\frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)} \right]_0^{\infty} = M \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)} - \frac{1}{-(a-s)} \right] = \\ &= \frac{M}{a-s}. \end{aligned}$$

Значи, ареоларниот лапласов интеграл се мајорира со интеграл што постои во полурамнината $\text{Re} z \geq a > s$, т.е. тој конвергира во споменатата полурамнина.

Теорема 2. Ареоларната лапласова слика $F_A = F_A(z)$ е аналитична функција од z .

Доказ. Согласно претходната теорема, ареоларната лапласова слика F_A е определена во која било полурамнина $\text{Re} z \geq a > s$. Ареоларниот лапласов интеграл можеме да го третираме како неправ

интеграл со параметар $\bar{z}$. Интегралот што се добива од него со диференцирање по параметарот $\bar{z}$ конвергира рамномерно по однос на $\bar{z}$ во полурамнината $\operatorname{Re} z \geq a > s$, бидејќи се мајорира со конвергентен интеграл што не зависи од $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} (-t) f(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-(x-iy)t}| \cdot |t| \cdot |f(t)| dt < \\ &< \int_0^{\infty} e^{-xt} t M e^{st} dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-at} e^{st} t dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{-(a-s)t} t dt = \\ &= M \left[-t \frac{e^{-(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-s)t}}{a-s} dt = \\ &= M \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-s)t}}{a-s} dt = -M \left[\frac{e^{-(a-s)t}}{(a-s)^2} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{M}{(a-s)^2}. \end{aligned}$$

Според тоа, може да се диференцира по параметарот $\bar{z}$ под знак на неправилен интеграл со бесконечна горна граница, поради што е точно равенството

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (e^{-\bar{z}t} f(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) (-t) dt,$$

што од своја страна повлекува постоење на изводот

$$\frac{\partial F_A(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dt = \frac{\partial F(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = F'(\bar{z}).$$

Следствено F_A и F се аналитични функции од $\bar{z}$.

Од друга страна

$$\frac{\partial F_A(z)}{\partial z} = \frac{\partial F(\bar{z})}{\partial z} = 0,$$

поради што F_A е антианалитична функција од z [5].

Теорема 3. Нека $L_A(f(t))=F_A(z)$, $L_A(g(t))=G_A(z)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $a > 0$. Точни се равенствата:

$$L_A(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F_A(z) + \beta G_A(z) \quad (4)$$

$$L_A(e^{at} f(t)) = F_A(z - \bar{a}) \quad (5)$$

$$L_A(f(at)) = \frac{1}{a} F_A\left(\frac{z}{a}\right) \quad (6)$$

$$L_A(f(t-a)) = e^{-a\bar{z}} F_A(z) \quad (7)$$

$$L_A(f(t+a)) = e^{a\bar{z}} \left(F_A(z) - \int_0^a f(t) e^{-\bar{z}t} dt \right) \quad (8)$$

$$L_A(f^{(n)}(t)) = \bar{z}^n F_A(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad (9)$$

$$L_A\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{F_A(z)}{\bar{z}} \quad (10)$$

$$L_A(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\partial^n F_A(z)}{\partial \bar{z}^n} \quad (11)$$

$$L_A\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^\infty F_A(u) d\bar{u} \quad (12)$$

Доказ. За илюстрация ќе бидат дадени докази на равенствата (4), (5) и (9), а точноста на преостанатите равенства може да се провери на сличен начин.

Имаме

$$\begin{aligned} L_A(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^\infty e^{-\bar{z}t} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\bar{z}t} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-\bar{z}t} g(t) dt = \\ &= \alpha F_A(z) + \beta G_A(z). \end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned}
 L_A(e^{at}f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} e^{at} f(t) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(\bar{z}-a)t} f(t) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(\bar{z}-\bar{a})t} f(t) dt = F_A(z-\bar{a}).
 \end{aligned}$$

При доказот на равенството (9), којшто се одвива со индукција по n , се претпоставува дека функцијата f и нејзините изводи до n -ти ред се оригинали. За $n=1$, имаме

$$\begin{aligned}
 L_A(f'(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f'(t) dt = e^{-\bar{z}t} f(t) \Big|_0^{\infty} + \bar{z} \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dt = \\
 &= -f(0) + \bar{z} L_A(f(t)) = \bar{z} F_A(z) - f(0).
 \end{aligned}$$

Претпоставка: Формулата (9) е точна за $n > 1$. За $n+1$, имаме

$$\begin{aligned}
 L_A(f^{(n+1)}(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f^{(n+1)}(t) dt = \\
 &= e^{-\bar{z}t} f^{(n)}(t) \Big|_0^{\infty} + \bar{z} \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f^{(n)}(t) dt = \\
 &= -f^{(n)}(0) + \bar{z} L_A(f^{(n)}(t)) = \\
 &= -f^{(n)}(0) + \bar{z} \left[\bar{z}^n F_A(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right] = \\
 &= \bar{z}^{n+1} F_A(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^{n-k} f^{(k)}(0) - f^{(n)}(0) = \\
 &= \bar{z}^{n+1} F_A(z) - \sum_{k=0}^n \bar{z}^{(n+1)-k-1} f^{(k)}(0).
 \end{aligned}$$

Со помош на равенството (2) и на равенствата од теоремата 3, лесно се составува следнава табела на ареоларни лапласови трансформации од некои елементарни функции оригинали $f(t)$

	$f(t)$	$L_A(f(t)) = F_A(z)$
1	a	$\frac{a}{z}$
2	e^{kt}	$\frac{1}{z-k} \quad (k > 0)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{z^2 + a^2}$
4	$\cos at$	$\frac{z}{z^2 + a^2}$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$
6	$\cosh at$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$
7	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{\bar{z} + a}{(\bar{z} + a)^2 + b^2}$
8	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(\bar{z} + a)^2 + b^2}$
9	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} = \frac{n!}{z^{n+1}}$
11	$t^a e^{bt}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(\bar{z} - b)^{a+1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Од теоријата на лапласова трансформација е познато дека

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Ако ставиме $p = \bar{z}$, имаме

$$F(\bar{z}) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{z}t} f(t) dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\bar{z}t} F(\bar{z}) d\bar{z},$$

т.е.

$$F(\bar{z}) = L_A(f(t)) = F_A(z) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\bar{z}t} F_A(z) d\bar{z}.$$

Формулата

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\bar{z}t} F_A(z) d\bar{z} \quad (13)$$

го дава начинот за определување на оригиналот f на ареоларната лапласова трансформација кога е позната сликата F_A . Оваа формула дефинира т.н. инверзна ареоларна лапласова трансформација и пишуваме

$$L_A^{-1}(F_A(z)) = f(t).$$

Од формулата (13) се уочува да ако две функции-оригинали имаат една иста ареоларна лапласова слика, тогаш тие се совпаѓаат во секоја точка t во која се непрекинати.

Поради тоа што

$$L_A(f(t)) = F_A(z) \Leftrightarrow L_A^{-1}(F_A(z)) = f(t) \quad (14)$$

јасно е дека претходно наведената табела може да послужи и за определување на оригиналот f при позната ареоларна лапласова слика F_A .

Сега, да видиме, како може да се примени ареоларната лапласова трансформација L_A и нејзе инверзната L_A^{-1} при решавање на некои ареоларни линеарни диференцијални равенки

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial^{n-k} W}{\partial \bar{z}^{n-k}} = F(\bar{z}) \quad (15)$$

каде што $a_k = a_k(z)$ ($k=1, 2, \dots, n$) се аналитични функции од $z=x+iy$, $a_0=1$ и $F=F(\bar{z})$ аналитична функција од $\bar{z}=x-iy$.

Познато е дека при ареоларниот извод $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ величината z се однесува како константа, поради што $W=W(z, \bar{z})$ во (15) може да се смета за функција од $\bar{z}$ со параметар z .

Видејќи досега проучената ареоларна лапласова трансформација L_A , комплексна функција од реална променлива пресликува во комплексна функција од комплексна променлива, а F и W се комплексни функции од комплексна променлива $\bar{z}$, следува дека F и W може да се земат за ареоларни лапласови слики на некои функции-оригинали, т.е.

$$F(\bar{z}) = L_A(f(t)) \quad (16)$$

$$W(z, \bar{z}) = L_A(\omega(z, t))$$

z - параметар.

Користејќи ја формулата (11) од теоремата 3, имаме

$$L_A(t^k \omega(z, t)) = (-1)^k \frac{\partial^k W(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^k},$$

т.е.

$$\frac{\partial^k W(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^k} = (-1)^k L_A(t^k \omega(z, t)) \quad (17)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Согласно со формулите (16) и (17), ареоларната линеарна равенка (15) го добива обликот

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k L_A(t^{n-k} \omega(z, t)) = L_A(f(t)).$$

Со примена над последното равенство на инверзна ареоларна лапласова трансформација, се добива алгебарска равенка по оригиналот

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k t^{n-k} \omega(z, t) = f(t) \quad (a_0=0)$$

од каде што

$$\omega(z, t) = \frac{f(t)}{\sum_{k=0}^n a_k (-t)^{n-k}}$$

или, ставајќи

$$p_n(-t) = \sum_{k=0}^n a_k (-t)^{n-k}, \quad (18)$$

$$\omega(z, t) = \frac{f(t)}{p_n(-t)}. \quad (19)$$

Со формулата (19) е определена комплексна функција ω од реална променлива t , при што z - параметар, чијашто ареоларна лапласова слика W е решение на ареоларната линеарна равенка (15).

Значи

$$W(z, \bar{z}) = L_A(\omega(z, t)) = L_A\left(\frac{f(t)}{p_n(-t)}\right) \quad (20)$$

е решение на ареоларната равенка (15).

Треба да забележиме дека (18) е карактеристичен полином по $-t$ на соодветната хомогена ареоларна линеарна диференцијална равенка на равенката (15). Од неговите корени како $\dot{y}$ од $f(t)$ ќе зависи $\dot{y}$ обликот на решението (20) на ареоларната равенка (15).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Д.Димитровски, М.Рајовиќ: За физичката смисла и техничкото значење на ареоларните лапласови трансформации, Матем. Билтен 11-12 (XXXVII-XXXVIII) 1987-1988, Скопје, 13-22
- [2] D.Dimitrovski, B.Ilievski: L'équation différentielle aréolaire de Laplace et la possibilité de l'introduction des transformations de Laplace aréolaires, Punime matematike, No 1 (1986), 17-25, Priština
- [3] Ј.Кечкиќ: О једној класи парцијалних једначина, Математички весник, 6(21), Београд, 1969
- [4] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат: Методы теорий функций комплексного переменного, "Наука", Москва, 1987
- [5] Г.Н.Положий: Обобщение теорий аналитических функций комплексного переменного, Киев, 1965

АРЕОЛЯРНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ЛАПЛАССА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ТОГО ПОРЯДКА

Борко Илиевски

Р е з ю м е

В первой части этой работы изучаются некоторые особенности так называемой ареолярной Лапласовой трансформации $L_A(2)$, сформулированной первый раз в работе [1].

В второй части она применяется для интегрирования линейного ареолярного дифференциального уравнения n -того порядка (15). При этом получено его решение в виде (20).

Отметим что уравнение вида (15) исследовано в работах [2], [3] и других.