

SUR LE MÉTHODE DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE DE LAPLACE
APPLIQUÉE AUX ÉQUATIONS ARÉOLAIRES LINÉAIRES

Dragan Dimitrovski, Borko Ilievski, Miloje Rajović

L'équation aréolaire linéaire de second ordre (1) aux coefficients polynômiaux est résolue par l'emploi d'une méthodologie qui présente une combinaison des méthodes classiques de Riemann et Frobenius sur les équations différentielles ordinaires complexes (11), et l'intégrale aréolaire de Laplace (3), avec les contours de Heinkel.

Dans les articles [1] et [2], suivant une analogie avec l'équation différentielle ordinaire de Laplace, on a défini l'équation aréolaire de Laplace, comme une équation aux dérivées conjuguées par $\bar{z}$: $\frac{\partial^k W}{\partial \bar{z}^k}$ d'une fonction $W(z, \bar{z})$ de deux variables complexes. A ce sujet, on a introduit la notion de l'intégrale généralisée de Laplace, au domaine de deux variables complexes indépendentes.

Dans l'article présent nous faisons un pas en avant et nous définissons une équation aréolaire de Laplace du second ordre avec les coefficients les polynômes aréolaires d'abord du troisième degré par rapport à $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} & (a_0(z)\bar{z}^3 + b_0(z)\bar{z}^2 + c_0(z)\bar{z} + d_0(z)) \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + \\ & + (a_1\bar{z}^3 + b_1\bar{z}^2 + c_1\bar{z} + d_1) \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + (a_2\bar{z}^3 + b_2\bar{z}^2 + c_2\bar{z} + d_2) W = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où $W(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$ présente une fonction complexe inconnue; $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$, $k=0, 1, 2, 3$ sont les fonctions analytiques données d'une variable complexe z , définies dans une région $G_1(z)$ du plane des complexes $z=x+iy$.

Une résolution réussite de l'équation (1) ouvrira un méthode qui permettra le succès dans l'abord d'une généralisation à une équation aréolaire linéaire aux coefficients polynômiaux:

$$\sum_{v=1}^n \left(\sum_{k=0}^p a_k(z) \bar{z}^k \right) \frac{\partial^v W}{\partial \bar{z}^v} = 0 \quad (2)$$

ce qui aurait les conséquences multiples quant à la généralisation des fonctions spéciales, les séries de Taylor généralisées, la théorie des points singuliers dans le domaine des complexes, etc.

Nous allons essayer de résoudre cette équation (1) au moyen de la méthode de l'intégrale définie, après avoir défini l'intégrale aréolaire de Laplace:

$$\int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta, z) d\zeta \quad (3)$$

ζ étant une variable complexe: $\zeta = \xi + i\eta$, définie dans une région $G(\zeta)$ du ζ - plan des complexes, dans laquelle est posé une ligne courbe de Jordan $\Gamma(\zeta)$; $z = x + iy$ étant une variable complexe complètement indépendante, définie dans la région $G_1(z)$ d'un autre plan des complexes, ayant $\bar{z}$ pour une variable conjuguée. $\phi(\zeta, z)$ étant une fonction de deux variables complexes indépendantes, telle que l'intégrale (3) existe; dans un cas particulier une fonction continue.

Nous chercherons la solution de l'équation (1) sous la forme de l'intégrale (3), c'est à dire:

$$W(z, \bar{z}) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta, z) d\zeta \quad (4)$$

$\phi(\zeta, z)$ étant la fonction inconnue, $\Gamma(\zeta)$ étant un contour inconnu; on doit les déterminer tous les deux pour que (1) soit satisfaite. C'est le sens complet du méthode de l'intégrale définie.

Les dérivations de (4) étant accomplies, on les remplace dans (1), et après les calculs élémentaires, on a l'identité suivante ($\bar{z}$ étant indépendant de ζ):

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \left[\bar{z}^3 P_2(\zeta, z) + \bar{z}^2 Q_2(\zeta, z) + \bar{z} R_2(\zeta, z) + S_2(\zeta, z) \right] e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta, z) d\zeta = 0 \quad (5)$$

avec

$$P_2(\zeta, z) = a_0(z)\zeta^2 + a_1(z)\zeta + a_2(z); \quad R_2(\zeta, z) = c_0(z)\zeta^2 + c_1(z)\zeta + c_2(z)$$

$$Q_2(\zeta, z) = b_0(z)\zeta^2 + b_1(z)\zeta + b_2(z); \quad S_2(\zeta, z) = d_0(z)\zeta^2 + d_1(z)\zeta + d_2(z)$$

ou

$$\int_{\Gamma(\zeta)} [A\zeta^2 + B\zeta + C] e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta, z) d\zeta \equiv 0 \quad (6)$$

A, B, C dépendant de $a_1(z)$, $b_1(z)$, $c_1(z)$, $d_1(z)$ et de $\bar{z}$. Après avoir effectuer trois intégrations par parties dans l'intégrale (5) (toujours prenant $dV = e^{\bar{z}\zeta} d\zeta$), on a

$$\begin{aligned} & \bar{z}^2 \left[e^{\bar{z}\zeta} P_2 \phi \right] / \Gamma(\zeta) + \bar{z} (e^{\bar{z}\zeta} [Q_2 \phi - (P_2' \phi + P_2 \phi')]) / \Gamma(\zeta) + \\ & + \{ e^{\bar{z}\zeta} [(P_2'' \phi + 2P_2' \phi' + P_2 \phi'') - (Q_2' \phi + Q_2 \phi') + (R_2 \phi)] \} / \Gamma(\zeta) + \\ & + \{ \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} [-(P_2''' \phi + 3P_2'' \phi' + 3P_2' \phi'' + P_2 \phi''') + (Q_2'' \phi + 2Q_2' \phi' + Q_2 \phi'') - \\ & - (R_2' \phi + R_2 \phi') + (S_2 \phi)] d\zeta \} / \Gamma(\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Pour que l'identité (7) soit rempli pour tout $\bar{z}$, il faut que les conditions suffisantes soient remplies:

$$\Delta \left[e^{\bar{z}\zeta} P_2 \phi \right] / \Gamma(\zeta) = 0 \quad (8)$$

$$\Delta [e^{\bar{z}\zeta} (Q_2 \phi - (P_2 \phi)_{\zeta}')] / \Gamma(\zeta) = 0 \quad (9)$$

$$\Delta \{ e^{\bar{z}\zeta} [(P_2 \phi)_{\zeta}'' - (Q_2 \phi)_{\zeta}' + (R_2 \phi)] \} / \Gamma(\zeta) = 0 \quad (10)$$

$$P_2 \phi''' + (3P_2' - Q_2) \phi'' + (3P_2'' - 2Q_2' + R_2) \phi' + (P_2''' - Q_2'' + R_2' - S_2) \phi = 0 \quad (11)$$

ou Δ signifie le changement de la fonction citée au cas du parcours de la ligne corbe $\Gamma(\zeta)$. Les conditions (8), (9), (10) étant les conditions d'annulement (les conditions aux limites), la condition (11) présente une équation différentielle pour déterminer la fonction inconnue $\phi(\zeta, z)$, au lieu de $W(\zeta, \bar{z})$, aux coe-

ficients polynômiaux, complètement déterminés par les coefficients a_1, b_1, c_1, d_1 de l'équation (1) donnée:

$$[a_0(z)\zeta^2 + a_1(z)\zeta + a_2(z)]\phi''(\zeta z) + [b_0\zeta^2 + (6a_0 - b_1)\zeta + 3a_1 - b_2]\phi'' + \\ + [c_0\zeta^2 + (c_1 - 4b_0)\zeta + c_2 - 2b_1 + 6a_0]\phi' + [-d_0\zeta^2 + (2c_0 - d_1)\zeta + c_1 - d_2 - 2b_0]\phi = 0 \quad (11)$$

C'est une équation différentielle ordinaire complexe par rapport à une fonction inconnue complexe $\phi(\zeta)$, à une variable indépendante complexe ζ , avec un paramètre indépendant complexe z ; aux coefficients polynômiaux étant les polynômes du II ordre de ζ , aux coefficients aussi dépendants du même paramètre complexe z , indépendant de ζ .

Si l'on résout l'équation (11), on aura une solution $\phi(\zeta, z)$. Après avoir remplacé cette $\phi(\zeta, z)$ dans (8), (9) et (10), on aura assez de liberté pour déterminer $\Gamma(\zeta)$, qui est complètement arbitraire. Il est évident que le problème essentiel dans la solution de l'équation aréolaire (1) est la résolution de l'équation complexe (11), que nous nomerons à cette cause une équation résolvante associée à l'équation (1). Les P_2, Q_2, R_2 étant les fonctions entières (auxquelles n'influencent pas les singularités par rapport à z des fonctions analytiques $a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)$, l'élection de $\Gamma(\zeta)$ dépendra en général de la nature de $\phi(\zeta)$ et de ses singularités. Si les singularités de $\phi(\zeta, z)$ sont les pôles, alors le parcours autour le contour $\Gamma(\zeta)$ donne

$$\Delta = 2\pi i \sum_{\zeta} \text{Res}(e^{\overline{z}\zeta} \cdot P_n \cdot \phi)$$

Si ϕ possède dans $\Gamma(\zeta)$ les singularités critiques, alors on a nécessairement $\Delta \neq 0$. Suivant le théorie de Riemann, généralement valable sur les équations (11), on a que les points singuliers des solutions $\phi(\zeta, z)$ sont les zéros du premier coefficient:

$$A_3(\zeta, z) = a_0(z)\zeta^2 + a_1(z)\zeta + a_2(z) = 0.$$

Ce sont les points isolés et l'on a

$$A_3(\zeta, z) \equiv a_0(z)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)$$

ainsi que (11) a les singularités qui sont les pôles du premier ordre. Prenons une singularité ζ_1 . L'équation (12) est écrite alors sous la forme

$$\phi'''' + \frac{p_1(\zeta, z)}{\zeta - \zeta_1} \phi'' + \frac{q_1(\zeta, z)}{\zeta - \zeta_1} \phi' + \frac{r_1(\zeta, z)}{\zeta - \zeta_1} \phi = 0 \quad (12)$$

les coefficients $p_1(\zeta, z)$, $q_1(\zeta, z)$, $r_1(\zeta, z)$ étant entières par rapport à ζ :

$$p_1(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - \zeta_1) + A_2(\zeta - \zeta_1)^2 + \dots$$

$$q_1(\zeta) = B_0 + B_1(\zeta - \zeta_1) + B_2(\zeta - \zeta_1)^2 + \dots$$

$$r_1(\zeta) = D_0 + D_1(\zeta - \zeta_1) + D_2(\zeta - \zeta_1)^2 + \dots$$

Comme l'on le sait à partir de la théorie de Riemann et Frobenius des équations différentielles du domaine complexe, l'équation (13) a nécessairement les solutions dans la forme d'une série potentielle généralisée

$$(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)^\rho \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (\zeta - \zeta_1)^k \quad (13)$$

l'exponent complexe ρ étant une solution de l'équation algébrique caractéristique du troisième degré, dont le procédé est dû à Riemann et Frobenius. Cette équation ayant les trois solutions différentes, on aura trois solutions distincts et séparées pour la fonction $\phi(\zeta)$.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (\zeta - \zeta_1)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1)} (\zeta - \zeta_1)^k = \phi_1(\zeta, \zeta_1, z) \\ \phi_2 &= (\zeta - \zeta_1)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(2)} (\zeta - \zeta_1)^k = \phi_2(\zeta, \zeta_1, z) \\ \phi_3 &= (\zeta - \zeta_1)^{\rho_3} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(3)} (\zeta - \zeta_1)^k = \phi_3(\zeta, \zeta_1, z) \end{aligned} \quad (14)$$

Ainsi que la solution générale de l'équation (11) au voisinage de ζ_1 est

$$\phi(\zeta, z) = C_1(z) \phi_1(\zeta, \zeta_1, z) + C_2(z) \phi_2(\zeta, \zeta_1, z) + C_3(z) \phi_3(\zeta, \zeta_1, z) \quad (15)$$

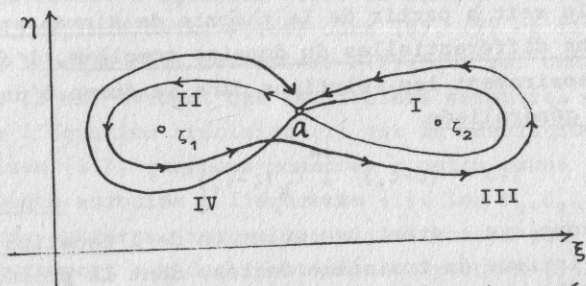
la convergence des séries étant garantie dans la bague:

$$0 < |\zeta - \zeta_1| < |\zeta_2 - \zeta_1|$$

Il en sera de même dans le voisinage de l'autre point singulier ζ_2 :

$$\phi^*(\zeta, z) = C_1^*(z)\phi_1^*(\zeta, \zeta_2, z) + C_2^*(z)\phi_2^*(\zeta, \zeta_2, z) + C_3^*\phi_3^*(\zeta, \zeta_2, z) \quad (16)$$

$\phi(\zeta)$ étant déterminée de cette façon, il faut déterminer le contour $\Gamma(\zeta)$. Les ζ_1 et ζ_2 étant les points régulier - singuliers, le parcours de $\Gamma(\zeta)$ donne $\Delta \neq 0$ de l'argument, ce qu'il faut neutraliser. On effectue cela au moyen d'un contour de Heinkel, dont le double parcours abolit les Δ_1 et Δ_2 dues à ζ_1 et à ζ_2 :



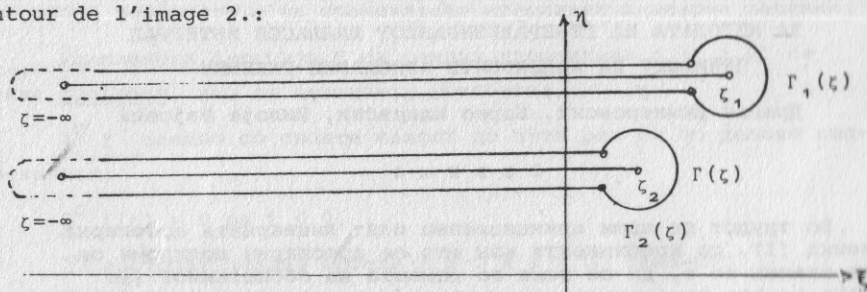
Quant à la solution générale de l'équation aréolaire (1), il faut accentuer que cette question n'est pas résolue d'une manière satisfaisante dans la littérature la plus citée [3], [4], [5]. Il s'agit du fait que l'on trouve par le procédé que nous proposons un nombre des solutions particulières qui n'est pas lié avec le rang $\underline{n}$ de l'équation (1). Cela dépendra généralement des conditions (8)-(11); parmi ces solutions il y aura des telles qui sont linéairement dépendentes. (C'est le même avec les intégrales de Laplace de l'équation de Laplace ordinaire du domaine des réels). En tout cas les solutions particulières et la solution générale de l'équation aréolaire (1) peut être cherchées dans la combinaison des intégrales de Laplace généralisées:

$$W(z, \bar{z}) = \int_{\Gamma_1(\zeta)=I+III} e^{\bar{z}\zeta} [C_1(z)\phi_1(\zeta, z) + C_2\phi_2(\zeta, z) + C_3\phi_3(\zeta, z)] d\zeta + \quad (17)$$

$$+ \int_{\Gamma_2(\zeta)=II+IV} e^{\bar{z}\zeta} [C_1^*(z)\phi_1^*(\zeta, z) + C_2^*\phi_2^*(\zeta, z) + C_3^*\phi_3^*(\zeta, z)] d\zeta$$

les "constantes" $C_1(z)$, $C_1^*(z)$ étant les fonctions analytiques de z arbitraires. On peut vérifier sans difficultés que tous les trois conditions (8), (9) et (10) sont emplies dans ce cas.

Dans quelques cas particulieres importants, il est nécessaire d'inclure dans la solution le point infini $\zeta = -\text{Re}(z) = -\infty$; par exemple si l'on veut avoir pour la représentation de la solution une intégrale réelle impropre, comme dans le cas des transformations intégrales. Alors on peut élire pour $\Gamma(\zeta)$ le contour de l'image 2.:



On a dans ce cas particulier la solution (éventuellement générale) de (1)

$$W(z, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{\zeta_1} e^{\bar{z}\zeta} [C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3] d\zeta \quad (18)$$

ou

$$W(z, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{\zeta_1} e^{\bar{z}\zeta} \left(\sum_{k=1}^3 C_k \phi_k \right) d\zeta + \int_{-\infty}^{\zeta_2} e^{\bar{z}\zeta} \left(\sum_{k=1}^3 C_k^* \phi_k^* \right) d\zeta$$

Γ_1 et Γ_2 étant les coupures de l'image.

L I T T E R A T U R E

- [1] Dimitrovski D.: Sur quelques équations différentielles linéaires aréolaires spéciales du II ordre, Matem. Vesnik SR Srbije, 38(1986), 417-424
- [2] Dimitrovski D., Ilievski B.: L'équation différentielle aréolaire de Laplace, et sur la possibilité de l'introduction des transformations de Laplace aréolaires, Matem. radovi Kosova, No 1 (1986), 17-25
- [3] Uiteker, Votson: Kurs sovremennovo analiza, T. II, Moskva, 1968
- [4] Olver F.: Vvedenie v asimptotičeskie metodi i special'nie funkicii, per. s angl., Moskva 1978, Acad. Press N.Y., London 1974
- [5] Smirnov V.I.: Kurs visšej matematiki, Tom III/2

ЗА МЕТОДАТА НА ГЕНЕРАЛИЗИРАНИОТ ЛАПЛАСОВ ИНТЕГРАЛ
ПРИМЕНЕТ НА ЛИНЕАРНИТЕ АРЕОЛАРНИ РАВЕНКИ

Драган Димитровски, Борко Илиевски, Милоје Рајовиќ

Р е з и м е

Во трудот се врши принципиелен опит линеарната ареоларна равенка (1), со коефициенти кои што се ареоларни полиноми од трет степен по $\bar{z}$, да се реши со помошта на обопштениот (во смисла на две комплексни променливи) интеграл на Лаплас (4), ослонувајќи се врз аналогии од реалната област, како и со интегралот на Лаплас од една комплексна променлива ([1], [2]), каде со помошта на интегралот на Лаплас понекогаш може да се најде и општото решение. Методата на парцијална интеграција (4) дава некои прилично општи доволни услови (8), (9) и (10) кога тоа може да се постигне. При тоа битна е обичната комплексна диференцијална равенка (11), која што ја викаме резолвентна за истиот проблем. Ако истата ја сметаме за решена врз основа на теоријата на Риман-Ваерштрас-Фробениус со редот (13), тогаш решението на ареоларната равенка (1) е во принцип дадено низ Лапласовиот интеграл (17) или (18), каде Γ е една Хајнkelова Контура.