Математички Билтен ISSN 0351-336X
34(LX)
2010 (47-51)
Скопје, Македонија

ЗА РЕШЕНИЕТО И РЕШАВАЊЕТО НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ТРЕТИ РЕД СО ФУНКЦИОНАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

ЛАЗО А. ДИМОВ

Апстракт. Во овој труд се разгледува линеарната диференцијална равенка од трети ред

$$f(x)y''' + g(x)y'' + h(x)y' + r(x)y = 0,$$

и се трансформира при одредени услови во диференцијалната равенка со константни коефициенти (1), па потоа согласно знакот на фигурирачките функции се добива нејзиното решение со помош на формулите (2), и се определува дали е монотоно растечко или осцилаторно.

1. Линеарната диференцијална равенка со константни коефициенти од трети ред

$$y''' + ay'' + a^2y' + a^3y = 0, \tag{1}$$

има општо решение кое се добива со формулата

$$y(x) = C_1e^{-ax} + C_2 \sin ax + C_3 \cos ax. \tag{2}$$

Решението за $a < 0$ е монотоно растечко, а за $a > 0$ е осцилаторно кога аргументот се стреми кон бесконечност.

2. Во диференцијалната равенка

$$f(x)y''' + g(x)y'' + h(x)y' + r(x)y = 0, \tag{3}$$

воведуваме смена на независно променливата со $x = x(t)$ со цел да ја трансформираме во диференцијална равенка од видот (1). Смената на независно променливата не доведува до диференцијалната равенка.

$$y'''+\frac{1}{x'^2}\left[A(x)x'^3 - 3x'x''\right]y''+\frac{1}{x'^2}\left[3x''^2 - x'x''' - A(x)x'^2x'' + B(x)x'^4\right]y'+C(x)x'^3y=0 \tag{4}$$

каде што x', x'', x''', y', y'', y''', се изводи по променливата t, а новите функции $A(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}, B(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}, C(x) = \dfrac{r(x)}{f(x)}$, се воведени за скратено означување и намалување на записите на формулите.

За последната равенка (4) да биде од обликот (1) треба да бидат задоволени релациите

$$\begin{aligned} &Ax' - 3\tfrac{x''}{x'} = a, \\ &3x''^2 - x'x''' - Ax'^2x'' + Bx'^4 = a^2x'^2, \\ &Cx'^3 = a^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Диференцирајќи ја третата од релациите (5) добиваме

$$x'' = -\frac{C'}{3C}x'^2, \text{ притоа } C' = \frac{dC}{dx}. \tag{6}$$

А со диференцирање на последната релација се добива

$$x''' = -\frac{1}{3}\left(\frac{C'}{C}\right)' x'^3 - \frac{2}{3}\frac{C'}{C}x'x'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{C'}{C}\right)' x'^3 + \frac{2}{9}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 x'^3, \tag{7}$$

притоа $\left(\frac{C'}{C}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{C'}{C}\right)$.

Сега со замена на x'' и x''' од (6) и (7) во втората од релациите (5) ја добиваме релацијата

$$\left[\frac{1}{9}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{C'}{C}\right)' + \frac{1}{3}A\frac{C'}{C} + B\right] x'^2 = a^2. \tag{8}$$

А со замена на x'' од (6) во првата од релациите (5) ја добиваме релацијата

$$\left(A + \frac{C'}{C}\right) x' = a. \tag{9}$$

Со елиминација на параметарот a и x' од релацијата (9) и третата од релациите (5) се добива релацијата

$$\left(A + \frac{C'}{C}\right)^3 = C \tag{10}$$

А со елиминација на параметарот a и x' од релациите (8) и (9) се добива релацијата

$$\frac{1}{9}\left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{C'}{C}\right)' + \frac{1}{3}A\frac{C'}{C} + B = \left(A + \frac{C'}{C}\right)^2 \tag{11}$$

Со извршената дискусија практично ја докажавме следната

Теорема 1. Диференцијалната равенка

$$f(x)y''' + g(x)y'' + h(x)y' + r(x)y = 0, \tag{3}$$

може да се трансформира во диференцијалната равенка со константни коефициенти

$$y''' + ay'' + a^2y' + a^3y = 0, \tag{1}$$

ако фигурирачките функции ги задоволуваат условите (10) и (11) односно условите

$$\left(A+\frac{C'}{C}\right)^3=C,\quad \frac{1}{9}\left(\frac{C'}{C}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{C'}{C}\right)'+\frac{1}{3}A\frac{C'}{C}+B=\left(A+\frac{C'}{C}\right)^2, \tag{12}$$

притоа трансформационата смена се добива со релацијата:

$$\int\left(A+\frac{C'}{C}\right)dx=at. \tag{13}$$

Пример 1. За диференцијалната равенка

$$x^3y'''+(k+3)x^2y''+(k^2+k+1)xy'+k^3y=0, k=const.,$$

фигурирачките функции

$$f(x)=x^3, g(x)=(k+3)x^2, h(x)=(k^2+k+1)x, r(x)=k^3,$$

ги задоволуваат условите (12) па со смената на независно промен ливата добиена од (13)

$$at=k\ln x,$$

се трансформира во диференцијалната равенка

$$y'''+ay''+a^2y'+a^3y=0,$$

по новата променлива t. Да забележиме дека a и k имаат ист знак.

Сега за општото решение се добива

$$y(t)=C_1e^{-at}+C_2\sin at+C_3\cos at, \tag{2}$$

па со оглед на смената на независно променливата општото решение на дадената диференцијална равенка гласи

$$y(x)=C_1x^{-k}+C_2\sin k\ln x+C_3\cos k\ln x.$$

За решението можеме да кажеме дека е монотоно растечко за $k<0$, а осцилаторно за $k>0$.

Пример 2. За диференцијалната равенка

$$x^2y'''+(x^{\frac{5}{3}}+x)y''+(x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{9})y'+xy=0,$$

фигурирачките функции

$$f(x)=x^2, g(x)=x^{\frac{5}{3}}+x, h(x)=x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{9}, r(x)=x,$$

ги задоволуваат условите (12) па со смената на независно променливата добиена од (13)

$$at=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

се трансформира во диференцијалната равенка

$$y'''+ay''+a^2y'+a^3y=0,$$

по новата променлива t.

Сега за општото решение се добива

$$y(t) = C_1 e^{-at} + C_2 \sin at + C_3 \cos at, \tag{2}$$

па со оглед на смената на независно променливата општото решение на дадената диференцијална равенка гласи

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}} + C_2 \sin \tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C_3 \cos \tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}.$$

За решението можеме да кажеме дека е осцилаторно.

Литература

[1] Аинс, *Обыкновные дифференциальные равнения,* ИЛ Москва, (1953).
[2] Камке Е., *Справочник по обыкновеным дифференциальныем уравнениям,* ГИ Москва, (1951).
[3] Димитровски Д.,Митевска Ј., *Линеарни тригонометрии од четврти и шести ред,* ПМФ - Скопје, Посебни изданија, (1996).
[4] Димов Л., *За решавањето на една диференцијална равенка од втор ред,* Математички билтен, Скопје, (1996).
[5] Димов Л., *За обликот на решението на една линеарна диференцијална равенка од втор ред со функционални коефициенти,* Осми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Охрид 30.09.2004–03.10.2004.
[6] Димов Л., *За обликот на решението на една диференцијална равенка од трети ред со функционални коефициенти,* Четврти конгрес на математичарите на Македонија, Струга 19–22.10.2008.

ON THE SOLUTION AND SOLVING OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH FUNCTIONAL COEFFICIENTS

Lazo A. Dimov

S u m m a r y

A linear differential equation of third order

$$f(x)y''' + g(x)y'' + h(x)y' + r(x)y = 0,$$

is observed in this paper. Under certain conditions it is transformed in the differential equation with constant coefficients of the type (1). Then, according to the sign of the corresponding functions, its solution is obtained, defined by the formulae (2). It can be determined wheter it is monotonically increasing or oscillatory.

Машински Факултет Скопје