Математички Билтен ISSN 0351-336X
34(LX)
2010 (27-34)
Скопје, Македонија

ДОЛЕН НИЛРАДИКАЛ СВРЗАН СО ЕДЕН ЕДНОСТРАН ИДЕАЛ

АЗИР ЈУСУФИ* И КРИСТАЌ ФИЛИПИ**

Апстракт. Базирајќи се на идеите на Андрунакиевич и Рјабухин за сврзување на радикалот на Џекобсон со еден десен идеал [3], ние интервенираме во теоријата на долниот нилрадикал на Бер, разгледувајќи го него сврзан со еден едностран идеал во еден асоцијативен прстен.

Во овој труд ви презентираме неколку добиени резултати при ваков осврт, што не доведе до поимот *долен нилрадикал сврзан со еден едностран идеал.*

1. Долниот нилрадикал на Бер

Дефиниција 1.1. Асоцијативниот прстенот R се вика нилпотентен прстен, ако $R^n = 0$ за некој цел број $n \geq 1$. Ова е еквивалентно со $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n = 0$ за произволни n елементи од прстенот R. Идеалот I на прстенот R се вика нилпотентен, ако I е нилпотентен прстен. На сличен начин се дефинираат и десниот (левиот) нилпотентен идеал и нилпотентните потпрстени.

Нека R е асоцијативен прстен и натаму во текстот, ќе го употребуваме само терминот "прстен", наместо "асоцијативен прстен". Означуваме со $N(R)$ збирот на сите нилпотентни идеали на прстенот R. Врз основа на погоре означеното, со помош на индукција ја конструираме низата на идеали од прстенот R

$$0 = N_0(R) \subseteq N_1(R) \subseteq \cdots \subseteq N_\alpha(R) \subseteq N_{\alpha+1}(R) \subseteq \cdots \tag{1}$$

каде α е ординален број. Ставаме

$$N_\mu(R) = \sum_{\alpha<\mu} N_\alpha(R), \tag{2}$$

ако μ е граничен и идеалите $N_\alpha(R)$ се идеали изградени како погоре за сите ординални броеви $\alpha < \mu$, додека

$$N_{\alpha+1}(R) = \sum\{I \mid I - \text{идеал на } R,\ I^n \subseteq N_\alpha(R), \text{ за некој цел број } n \geq 1\} \tag{3}$$

за секој ординален број α, т.е. $N_{\alpha+1}(R)$ е идеал на прстенот R, таков што ќе го содржи идеалот $N_\alpha(R)$ и

$$N_{\alpha+1}(R)/N_\alpha(R) = N\left(R/N_\alpha(R)\right). \tag{4}$$

Дефиниција 1.2. ([3], стр. 30). Долен нилрадикал (или радикал на Reinhold Baer) на прстенот R го викаме идеалот

$$B(R) = \sum_{\alpha \geq 0} N_\alpha(R) \tag{5}$$

конструиран според идеалите $N_\alpha(R)$ од низата (1).

Подолу ќе дадеме неколку важни леми, кои ќе ни помогнат за да заклучиме дека (5) е долен нилрадикал.

Лема 1.1. ([3], стр. 30). Хомоморфните слики и потпрстените на нилпотентен прстен се нилпотентни прстени. Ако идеалот I и фактор-прстенот A/I се нилпотентни прстени, тогаш и прстенот A е нилпотентно . Во секој прстен R, збирот на секое конечно множество на нилпотентните идеали е нилпотентен идеал.

Лема 1.2. ([3], стр. 31). Левиот (десниот) нилпотентен идеал A во прстенот R го генерира нилпотентиот идеал $A + AR + RA + RAR$ на прстенот R. Збирот $N(R)$ од сите нилпотенти идеали од R се совпаѓа со збирот на сите леви нилпотентни идеали и со збирот на сите десни нилпотентни идеали. Специјално, ако прстенот R нема нилпотенти идеали различни од нула идеалот, тогаш R нема ни еднострани нилпотенти идеали различни од нула.

Лема 1.3. ([3], стр. 32). За секој прстен R од класата на радикали, постои ординалниот број $\tau = \tau(R)$, таков што $B(R) = N_\tau(R)$. Ова значи дека низата (1) се стабилизира во чекорот τ.

Дефиниција 1.3. ([3], стр. 35). Прстенот R се вика B-радикален прстен, ако $R = B(R)$. Прстенот Q се вика B-полупрост прстен, ако $B(Q) = 0$.

Имајќи ги предвид горенаведените леми, ги имаме следниве теореми:

Теорема 1.1. ([3], стр. 35). Прстенот Q е B-полупрост тогаш и само тогаш кога тој нема нилпотенти идеали различни од нула. Прстенот R е B-радикален тогаш и само тогаш, кога секоја хомоморфна слика различна од нула на прстенот R има нилпотентни идеали различни од нула.

Последица 1.1. ([3], стр. 36). Прстенот Q е B-полупрост тогаш и само тогаш кога тој нема еднострани нилпотенти идеали различни од нула .

Ако I е идеал на прстенот R, тогаш важи равенството

$$B(I) = I \cap B(R) \tag{6}$$

Последица 1.2. ([3], стр. 36). Хомоморфните слики и потпрстените на B-радикален прстен се B-радикални пртени. Секој идеал на B-полупростен прстен е B-полупростен прстен.

Дефиниција 1.4. ([3], стр. 36). Идеалиот I на прстенот R се нарекува B-радикален идеал на прстенот R ако I е B-радикален прстен, т.е. $I = B(I)$. Идеалот T се нарекува B-радикал на прстенот R, ако T е најголем радикален идеал.

Теорема 1.2. ([3], стр. 36). Во секој прстен R, збирот на секое множество на B-радикални идеали е B-радикален идеал. Специјално, постои B-радикалот на прстенот R кој се совпаѓа со идеалот $B(R)$. Идеалот $B(R)$ е најмалиот од идалите P на прстенот R, таков што фактор-прстенот R/P е B-полупрост прстен т.е. нема нилпотентни идеали различни од нула.

Последица 1.3. ([3], стр.37) Нека A е идеал на пртенот R. Ако прстените A и R/A се B-радикални прстени, тогаш и самиот прстен R е B-радикален прстен. Ако прстените A и R/A се B-полупрости прстени, тогаш и самиот прстен R е B-полупрост прстен. Ако прстенот A е B-радикален прстен додека R/A е B-полупрост прстен тогаш $A = B(R)$.

2. Долниот нилрадикал сврзан со еден едностран идеал

Врз основа на горенаведеното, за долниот нилрадикал на еден прстен, ќе го презентираме теоретското истражување за поимот на долниот нилрадикал сврзан со еден едностран идеал на некој прстен. Во истражувањето ќе се сконцентрираме на сврзувањето со еден десен идеал бидејќи на аналоген начин може да се гради теорецкото истражување на долниот нилрадикал сврзан со еден лев идеал.

Дефиниција 2.1. ([13], стр. 145). Нека P е десен идеал на прстенот R. Прстенот R се вика нилпотентен прстен сврзан за десниот идеал P, ако $R^n \subseteq P$, за некој цел број $n \geq 2$. Ова е еквивалентно со тоа што $a_1a_2a_3....a_n \in P$, за секои n-елементи од прстенот R.

Идеалот (едностран) $I \triangleleft R$ се вика нилпотентен (едностран) идеал сврзан со десниот идеал P, ако I е нилпотентен прстен сврзан со десниот идеал P.

Нека R е произволен прстен. Го означуваме со симболот $N(R, P)$ збирот на сите нилпотентни (десни) идеали сврзани со десниот идеал P на прстенот R. Имајќи го предвид горенаведеното, ја конструираме на индуктивен начин следнава низа на идеали од прстенот R:

$$P = N_0(R,P) \subseteq N_1(R,P) \subseteq ...... \subseteq N_\alpha(R,P) \subseteq N_{\alpha+1}(R,P) \subseteq .... \tag{7}$$

каде α е ординален број. Ставаме

$$N_\mu(R,P) = \sum_{\alpha<\mu} N_\alpha(R,P) \tag{8}$$

ако μ е граничен ординален број, каде идеалите $N_\alpha(R,P)$ се горе конструираните идеали за сите ординални броја $\alpha < \mu$, додека

$$N_{\alpha+1}(R,P) = \sum \{I \mid I - \text{идеал(десен) на } R,\, I^n \subseteq N_\alpha(R,P)\} \tag{9}$$

за некој цел број $n \geq 2$ и за секој ординален број α, т.е. $N_{\alpha+1}(R,P)$ е идеал на R што го содржи $N_\alpha(R,P)$.

Дефиниција 2.2. Долен нилрадикал на прстенот R сврзан за десниот негов идеал P го викаме идеалот

$$B(R,P) = \sum_{\alpha\geq 0} N_\alpha(R,P) \tag{10}$$

конструиран според идеалите $N_\alpha(R,P)$ на низата (7).

Сега ќе презентираме некои резултати, кои се потребни за изградба на долниот нилрадикал сврзан за еден десен идеал на дадениот прстен R.

Нека P е заеднички десен идеал на нилпотентните прстените R_1 и R_2 сврзани со P.

Дефиниција 2.3. P-хомоморфизам на нилпотентниот прстен R_1 сврзан со десниот идеал P во нилпотентниот прстен R_2 сврзан со истиот десен идеал P, го викаме секој хомоморфизам $\varphi : R_1 \to R_2$, таков што за секој $x \in P$, $\varphi(x) = x$.

Теорема 2.1. Секоја P-хомоморфна слика и секој потпрстен на нилпотентниот прстен сврзан со десниот идеал P, е нилпотентен прстен сврзан со десниот P.

Доказ. Нека R е нилпотентен прстен сврзан со идеалот P. Бидејќи $R^n \subseteq P$ тогаш $\phi(R^n) \subseteq \phi(P)$. Но, P-хомоморфната слика на идеалот P е самиот идеал P и бидејќи $\phi(R^n) = (\phi(R))^n$, затоа $(\phi(R))^n \subseteq P$.

Ако R_1 е потпрстен на R, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$ таков што, $R_1^n \subseteq R^n \subseteq P$, значи $R_1^n \subseteq P$, т.е. R_1 е нилпотентен потпрстен сврзан со P.

Теорема 2.2. Нека P е десен идеал на прстенот R и I негов идеал таков што $P \subseteq I$. Ако идеалот I е нилпотентен сврзан со десниот идеал P и фактор-прстенот R/I е нилпотентен, тогаш прстенот R е нилпотентен сврзан со десниот идеал P.

Доказ. Според дефинициите 2.1 и 1.1, постојат целите броеви $m \geq 1$, $n \geq 1$, такви што $I^m \subseteq P$ и $(R/I)^n = \{\overline{0}\} = \{I\}$. Тогаш $(R/I)^n = \{I + a_1 a_2 ... a_n | a_i \in R,\ i = 1, 2, ..., n\} = \{I\} \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n \in I \Rightarrow R^n \subseteq I$. Но, тогаш $R^{nm} \subseteq I^m \subseteq P$. Значи, R е нилпотентен прстен сврзан со десниот идеал P.

Теорема 2.3. Збирот на два нилпотентни идеали сврзани со десниот идеал P е нилпотентен идеал сврзан со десниот идеал P.

Доказ. Нека I, J се два нилпотентни идеали сврзани со десниот идеал P на прстенот R. Имајќи ги предвид теоремите за изоморфизми, добиваме $\dfrac{I+J}{J} \cong \dfrac{I}{I \cap J}$. Но $\dfrac{I}{I \cap J}$ е нилпотентен идеал, како хомоморфна слика на I. Бидејќи I, J се нилпотентни идеали сврзани со десниот идеал P и $\dfrac{I+J}{J}$ е нилпотентен, Тогаш според теоремата 2.2, $I + J$ е нилпотентен идеал сврзан со десниот идеал P.

Последица 2.1. Во секој прстен R, збирот на конечното множество на нилпотентни идеали сврзани со десниот идеал P е нилпотентен идеал сврзан со десниот идеал P.

Доказот е очигледен според теоремата 2.3 и математичката индукција.

Теорема 2.4. Нилпотентниот лев идеал A сврзан за десниот идеал P на прстенот R, го генерира нилпотентниот идеал $A + AR$ сврзан со десниот идеал P на прстенот R.

Доказ. Нека A е нилпотентен лев идеал сврзан со десниот идеал P на прстенот R. За идеалот $A + AR$ генериран од A во R имаме:

$$\begin{aligned}
&(A+AR)^1 \subseteq A^1 + A^1 R \\
&(A+AR)^2 \subseteq A^2 + A^2 R + ARA + ARAR \subseteq A^2 + A^2 R \\
&(A+AR)^3 \subseteq (A+AR)(A^2 + A^2 R) \subseteq A^3 + A^3 R \\
&------------------------------ \\
&(A+AR)^n \subseteq A^n + A^n R \subseteq P + PR
\end{aligned}$$

Бидејќи $A^n \subseteq P$ и P е десен идеал во R, т.е. $PR \subseteq P$, имаме

$$A^n + A^n R \subseteq P + PR \subseteq P + P \subseteq P.$$

Значи, $A + AR$ е нилпотентен идеал сврзан со десниот идеал P.

Теорема 2.5. За секој прстен R од класата на радикали (сврзано со нилпотетноста наспроти десниот идеал P), постои ординален број τ таков што $B(R, P) = N_\tau(R, P)$.

Доказ. На почеток ќе докажеме, кога за некој ординален број α имаме $N_\alpha(R, P) = N_{\alpha+1}(R, P)$, тогаш $N_\alpha(R, P) = N_\beta(R, P)$ за секој ординален број $\beta \geq \alpha$. Накратко ќе ја докажеме импликацијата

$$N_\alpha(R, P) = N_{\alpha+1}(R, P) \Rightarrow N_\alpha(R, P) = N_\beta(R, P),\ \forall \beta \geq \alpha \qquad (11)$$

Ако $N_\alpha(R,P) = N_{\alpha+1}(R,P)$, тогаш за $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha + 1$, равенството $N_\alpha(R,P) = N_\beta(R,P)$ е вистинито. Претпоставуваме дека горенаведеното равенство важи за сите ординални броеви β такви што $\alpha \leq \beta < \gamma$, каде γ е ординален број. Ако γ е граничен ординален број, тогаш од индуктивната претпоставка и од (8) имаме,

$$N_\gamma(R,P) = \sum_{\beta<\gamma} N_\beta(R,P) = \sum_{\alpha\leq\beta<\gamma} N_\beta(R,P) = N_\alpha(R,P)$$

Следува дека равенството $N_\alpha(R,P) = N_\beta(R,P)$ е вистинито и за $\beta = \gamma$. Ако γ е негграничен ординален број, тогаш$\gamma = \beta + 1$, за некој ординален број β и од индуктивната претпоставка (бидејќи $\beta < \gamma$), ќе имаме $N_\alpha(R,P) = N_\delta(R,P)$. Но, тогаш од (9) добиваме дека,

$$N_{\alpha+1}(R,P) = \sum \left\{I \,|\, I - \text{идеал(десен) во } R,\ I^n \subseteq N_\alpha(R,P)\right\} =$$
$$= \sum \left\{I \,|\, I - \text{идеал(десен) во } R,\ I^n \subseteq N_\delta(R,P)\right\} = N_{\delta+1}(R,P) = N_\gamma(R,P)$$

Како последица имаме $N_\alpha(R,P) = N_\gamma(R,P)$, бидејќи имаме $N_\alpha(R,P) = N_{\alpha+1}(R,P)$. Врз основа на индукцијата, равенството $N_\alpha(R,P) = N_\beta(R,P)$ е вистинито за сите ординални броеви $\beta \geq \alpha$.

Нека τ е еден ординален број таков што кардиналниот број на множеството на ординални броеви $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \tau\}$ да е строго поголем од кардиналниот број $|R|$ на множеството R. Ќе покажеме дека за овој τ, низата (7) се стабилизира на τ чекор, т.е. $B(R,P) = N_\tau(R,P)$.

Го претпоставуваме спротивното дека $N_\tau(R,P) \neq N_{\tau+1}(R,P)$, што значи $N_\tau(R,P) \subset N_{\tau+1}(R,P)$. Но, тогаш од (11) излегува дека за секој ординален број $\beta \leq \tau$, имаме $N_\beta(R,P) \subset N_{\beta+1}(R,P)$. Ова ни овозможува да за секој таков ординален број β можеме да избереме најмалку еден елемент $r_\beta \in N_{\beta+1}(R,P) - N_\beta(R,P)$. Јасно е дека сите елементи r_β се различни и затоа множеството $\{r_\beta | 0 \leq \beta \leq \tau\}$ има кардинален број еднаков со множеството на ординални броеви $\{\beta | 0 \leq \beta \leq \tau\}$, кој според начинот на изборот на τ, е строго поголем од оној на множеството R. Вака, множеството R има потмножество со кардинален број поголем од самото множество R. Оваа контрадикција ни покажува дека теоремата важи.

Накрај, означуваме дека во случај кога $B(R,P) = R$, тогаш прстенот R се вика B-радикален прстен сврзан со десниот идеал P. Од теоремата произлегува дека прстенот R е B-радикален прстен сврзан со десниот идеал P кога $N_\tau(R,P) = R$. Во случај кога $B(R,P) = P$, прстенот R се вика B-полупрост сврзан со десниот идеал P. Од теоремата произлегува дека прстенот R е B-полупрост сврзан со десниот идеал P, ако $N_\tau(R,P) = P$.

Литература

[1] B. J. Gardner, R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, Marcel Dekker, Inc. New York-Basel, (2004).

[2] N. J. Divinsky, *Rings and Radicals*, (1965).

[3] В. А. Андрунакиевич, М. Рябухин Ю, *Радикалы алгебр и структурная теория,* М. Наука, (1979).

[4] Е. Адемај, Е. Гаши, *Algjebra e përgjithshme*, Приштинe, (1986).

[5] Ю. А. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры,* Москва, (1990).

[6] K. Filipi, *Algjebra dhe Gjeometria*, Tiranë, (2005).

[7] В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, *Квазирегулярность и примитивность относительно правых идеалов кольца,* Математический сборник N.4(12)УДК (1987), 451-471.

[8] Azir Jusufi, *Radikalet e algjebrave lidhur me një ideal te djathtë*, punim magjistrature, Prishtinë, (2006).

[9] Azir Jusufi, *Nilradikalet lidhur me një ideal të njëanshëm në unazat asociative dhe disa konstruktime*, Disertacion doktorature, Tiranë, (2009).

[10] M. Ferrero and E.R. Puczylowski, *The Singular Ideal and Radicals*, J.Austral. Math. Soc. 64 (1998), 195-209.

[11] A. Jusufi, K. Filipi, *The upper nilradical connected with a right ideal in the ring of the triangular $n \times n$-matrices on the field of the real numbers*, Mathematica Macedonica, Skopje vol.**5** (2007), 43-56.

[12] A. Jusufi, *Radikali lokalisht nilpotent lidhur me një ideal të djathtë*, Buletini shkencor UNIEL-Proceedings, Elbasan, (2007), viti XI-2007/3, 52-61.

[13] A. Jusufi , *Nilradikali i poshtëm lidhur me një ideal të djathtë*, Buletini shkencor UNIEL, Elbasan, (2007), viti XI-2007/1, 145-156.

[14] A. Jusufi, K. Filipi, *Radikali i Jacobsonit. Ndërtimi, relativiteti, trashëgimia dhe fortësia e tij*, The scientific bulletin UNIEL-Proceedings, Elbasan (2008), viti XII, 2008/3, 69-84.

[15] A. Jusufi, K. Filipi, *Nilradikali i sipërm lidhur me një ideal të djathtë në unazën e matricave reale trekëndëshe të rendit të tretë*, Buletini shkencor UNIEL viti XII i botimit, Elbasan, (2009), nr. 2008/4, 92-104.

[16] А. Јусуфи, К. Филипи, *Горниот нилрадикал сврзан со еден десен идеал на прсетонот,* Математички Билтен, Скопје, (2009).

LOWER NILRADIKAL CONNECTED WITH ONE-SIDED IDEAL

Azir Jusufi* and Kristak Filipi**

S u m m a r y

Based on the ideas of Andrukievich and Rabjuhin for bonding the Jacobson radical of a right ideal [3], we intervened in the theory of lower Ber nilradikal, looking at him as connected with a one-sided ideal in an associative ring.

In this paper we present some results obtained during this review, which brought us to the term *lower nilradikal connected with one sided ideal*.

*Државен Универзитет во Тетово
E-mail address: azir.jusufi@unite.edu.mk

**Политехнички Универзитет во Тирана
E-mail address: f_kristaq@hotmail.com