Математички Билтен ISSN 0351-336X
32 (LVIII)
2008 (75-81)
Скопје, Македонија

ГОРНИОТ НИЛРАДИКАЛ СВРЗАН СО ЕДЕН ДЕСЕН ИДЕАЛ НА ПРСТЕНОТ $(Z[\sqrt{2}], +, \cdot)$

АЗИР ЈУСУФИ* И КРИСТАЌ ФИЛИПИ**

Апстракт. Покрај теоретското истражување за радикалите сврзани со еден десен идеал во асоцијативните прстени, ние се потрудивме да конструираме модели на имплементација на теоретското достигнување. Покрај многуте конструкции што ги направивме, подолу презентираме еден конкретен горен нилрадикал на прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со десниот идеал $P[\sqrt{2}]$.

1. ПОИМ НА РАДИКАЛОТ

Некои својства на прстените се разликуват многу од добро познатите својства, така што ние имаме потешкотии за нивно класифицирање. Овде се наоѓа и оправданоста за дефинирање на еден дел од прстенот во врска со некои одредени својства, тој дел се нарекува *радикал на прстенот.*

Во почеток ги разгледуваме овие теореми:
Нека се I_1, I_2 потпрстени на прстенот R. Под збир $I_1 + I_2$ на овие потпрстени, се подразбира множеството $I_1 + I_2 = \{i_1 + i_2 | i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$.

Теорема 1.1. *([5], str.397). Ако I_1, I_2 се идеали на прстенот R, тогаш и $I_1 + I_2 = \{i_1 + i_2 | i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$ е идеал на R.*

Нека се $I_1, I_2, ..., I_k, ...$ (не мора да е конечен број) едно множество на потпрстени на прстенот R. Под нивен збир, што ќе го означиме $\sum\limits_k I_k$, се подразбира множеството $\sum\limits_k I_k = \{i_1 + i_2 + ... + i_k + ...| \, |i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, ...\}$. Поради горе наведеното, ја имаме следнава:

Теорема 1.2. *([2], str.4). Збирот на кое било множество идеали на еден прстен, исто така е идеал на прстенот.*

Нека е γ една класа на прстени така што:
a) γ е хомоморфно затворена, т.е:
$A \in \gamma$ и $\varphi : A \to B$ е хомоморфизам, повлекува $B \in \gamma$.
b) за секој прстен A, збирот $\gamma(A) = \sum(I \lhd A | I \in \gamma)$ исто така е во γ.
c) $\gamma(A/\gamma(A)) = 0$, за секој прстен A.

Дефиниција 1.1. *([1],str.22). Класата γ на прстени која ги задоволува условите* a), b), c), *ја нарекуваме* **радикална класа.** *$\gamma(A)$ се вика γ-радикал на A или накратко радикал на A. Прстенот A се вика γ-***радикален прстен** *ако $A \in \gamma \Rightarrow \gamma(A) = A$.*

Условите a), b), c) се основни услови за мотивирање и одредување на радикалот. Да се докаже дека овие услови се задоволени или не, за некои класи на прстени не е лесна работа. Затоа ние тежнееме да бараме еквивалетни услови со нив.

Теорема 1.3. *([1],str.22). Ако важат условите* a) *и* b) *во една класа на прстени γ , тогаш условот* c)*е еквивалентен со:*
$\bar{c}$) Ако I е идеал на прстенот A и ако I и A/I се во γ, тогаш и A е во γ.

Кога класата γ на прстените го задоволува условот $\bar{c}$) тогаш викаме дека γ е *затворена во врска со проширувања.*

Теорема 1.4. *Ако се прифатат условите a) и $\bar{c}$) во класата γ на прстените, тогаш условот b) е еквивалентен со:*
$\bar{b}$) Ако $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_\lambda \subseteq ...$ е растечка низа на идеали од прстенот A и ако секоја I_λ е во γ, тогаш $\sum\limits_{\lambda} I_\lambda$ е во γ.

Доказ. Претпоставуваме дека важи b) и нека $B = \sum\limits_{\lambda} I_\lambda$. Но, од b) имаме дека I_λ е во $\gamma(B)$, и затоа $B = \gamma(B)$ е во γ; докажавме вака дека важи $\bar{b}$).

Обратно, претпоставуваме дека важи $\bar{b}$). Применувајќи ја лемата на Цорн за постоењето на максимален γ-идеал B во A и ако K е кој било γ-идеал во A тогаш $(B+K)/K \cong B/(B \cap K)$ е во γ, според a). Така K и $(B+K)/K$ се во γ и според $\bar{c}$) $B+K$ исто така е во γ . Бидејќи B е максимален идеал со ова својство, K секако ќе биде во B, $\gamma(A) = B$ е во γ . Својството b) важи, и доказот е завршен.

Кога класата γ на прстените го задоволува условот $\bar{b}$) тогаш викаме дека γ е со *индуктивно својство.*

Од двете горенаведени тврдења ја имаме следнава:

Теорема 1.5. *([1], стр.23). Класата γ на прстени е класа на радикали тогаш и само тогаш кога:*
a) γ е хомоморфно затворена
$\bar{b}$) γ е со индуктивно својство
$\bar{c}$) γ е затворена во врска со проширувања.

2. НИЛПРСТЕНИ, НИЛРАДИКАЛИ

Дефиниција 2.1. ([2], стр.18). Елементот x на прстенот R се вика **нилпотентен** ако $\exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0$ ($\mathbb{N}$ е множеството на позитивните цели броеви). Прстенот R се вика **нилпрстен** ако секој негов елемент е нилпотентен. Идеалот I на прстенот R се вика **нилидеал** на R ако I е нилпрстен.

Со s го означуваме својството $\forall x \in R$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x^n = 0$. Својството s се вика нил својство. Во овие услови, ние можеме да речеме дека нилпрстен е прстенот R што го исполнува нилсвојството s. Еден таков прстен може да се вика и s-прстен.

Лема 2.1. *([2], стр.19).*

i) Ако R е нилпрстен тогаш секој потпрстен и секоја хомоморфна слика на R е нилпрстен.

ii) Ако I е идеал на R и I, R/I се нилпрстени, тогаш R е нилпрстен.

Лема 2.2. *Збирот на два нилидеала е нилидеал.*

Доказ. Нека се I и J нилидеали во R. Според втората теорема за изоморфизам имаме: $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$, каде $(I+J)/J$ е нилидеал според Лема 2.1.ii), додека $I/(I \cap J)$ е нилидеал како хомоморфна слика на I. Бидејќи I, J, $(I+J)/J$ се нилидеали тогаш добиваме дека $I+J$ е нилидеал.

Базирајќи се на Лемата 2.2, со математичка индукција се докажува и следново својство:

Последица 2.1. Збирот на еден конечен број на нилидеали е нилидеал.

Од горенаведеното следува:

Лема 2.3. *([2], стр.19). Збирот на кое било множество нилидеали во R е нилидеал во R.*

Подолу ќе покажеме дека класата S на s-прстените е класа на радикали.
a) Од Лема 2.1.i) следува дека секоја хомоморфна слика на еден s-прстен е s-прстен, т.е. класата S е хомоморфно затворена.
$\bar{c}$) Од Лема 2.1.ii) следува дека, ако I е идеал во R и I, R/I се во класата S, тогаш и R е во S. Ова ни потврдува дека класата S е затворена во врска со проширувања.
b) Од Лема 2.3 следува дека за секој прстен R , $S(R) = \sum (I \triangleleft R \,|\, I \in S)$ е во класата S.

Базирајќи се на теоремата 1.4, произлегува дека горенаведеното својство b) е еквивалентно со:

$\bar{b}$) Ако $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_\lambda \subseteq ...$ е една растечка низа на нилидеали во прстенот R тогаш збирот $\sum\limits_{\lambda} I_\lambda$ е во S.

Како последица на теорема 1.5, ја имаме следнава

Теорема 2.1. *Класата S е класа на радикали.*

Оваа теорема ни покажува дека $S(R)$ е радикал на нилпрстенот R. $S(R)$ го викаме нилрадикал на прстенот R. Од горенаведените услови b) и $\bar{b}$), произлегува дека $S(R)$ е најголемиот нилидеал во прстенот R.

Дефиниција 2.2. Најголемиот нилидеал во нилпрстенот R се вика и горен нилрадикал или нилрадикал на Кјота. Се означува со $K(R)$.

Заклучок 2.1. ([3], стр.47). Во секој прстен R, збирот на едно множество од негови нилидеали е нилидеал во R . Затоа, во секој прстен R постои горниот нилрадикал $K(R)$ и се совпаѓа со збирот на сите нилидеали на прстенот R . Ако I е идеал во прстенот R , тогаш $K(I) = I \cap K(R)$. За секој прстен R , фактор-прстенот $R/K(R)$ нема нилидеали различни од нула и затоа $K\left(R/K(R)\right) = 0$.

Дефиниција 2.3. ([3], стр.47). Прстенот R се вика K-радикален, ако $R = K(R)$. Прстенот Q се вика K-полупрост (semi-simply), ако $K(Q) = 0$.

Теорема 2.2. *([3], стр.47). Прстенот R е K-радикален тогаш и само тогаш кога тој е нилпрстен. Прстенот Q е K-полупрост тогаш и само тогаш , кога тој нема нилидеали различни од нула. Секој идеал на K - радикален прстен е K -радикален прстен и секој идеал на K -полупрост прстен е K -полупрост прстен.*

3. ГОРНИОТ НИЛРАДИКАЛ СВРЗАН СО ЕДЕН ДЕСЕН ИДЕАЛ

Базирајќи се во горенаведениот теоретски осврт за нилрадикалот на еден прстен, ние подолу ќе презентираме теоретски осврт за поимот на горниот нилрадикал сврзан со еден еднostран идеал на еден прстен. Нашиот теоретски осврт ќе биде сврзан со десниот идеал, бидејќи теоретскиот осврт сврзан со левиот идеал се конструира на аналоген начин.

Нека P е десен идеал во прстенот R.

Дефиниција 3.1. Прстенот R се вика нилпрстен сврзан со десниот идеал P, ако $\forall a \in R$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $a^n \in P$.

Идеалот I се вика нилидеал сврзан со десниот идеал P, ако I е нилпрстен сврзан со десниот идеал P.

Лема 3.1. *([6], стр.114).*

a) Секоја хомоморфна слика и секој потпрстен на нилпрстенот сврзан со десниот идеал е исто така нилпрстен сврзан со десниот идеал.

b) Ако идеалот I во R и фактор-прстенот R/I се нилпрстени сврзани со десниот идеал P тогаш и R е нилпрстен сврзан со P.

c) Во еден прстен R, за секое конечно множество на нилидеали сврзани со идеалот P, нивниот збир е нилидеал сврзан со десниот идеал P.

Базирајќи се на теоремата 1.4 од точка 1, произлегува дека горенаведениот услов c) е еквивалентен со:

$\bar{c}$) Ако $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_\lambda \subseteq ...$ е една растечка низа на нилидеали сврзани со десниот идеал P на R, тогаш збирот $\sum\limits_{\lambda} I_\lambda$ е нилидеал сврзан со десниот идеал P.

Имајќи ја предвид дефиницијата на нилрадикалот на Кјота, ја земаме оваа

Дефиниција 3.2. Горен нилрадикал сврзан со десниот идеал P во прстенот R се вика најголемиот нилидеал сврзан со десниот идеал P. Се означува $K(R,P)$.

Заклучок 3.1. Во прстенот R, збирот на секое конечно множество на нилидеали сврзани со десниот идеал P е нилидеал сврзан со десниот идеал P. Затоа, во секој прстен R, постои горниот нилрадикал $K(R,P)$ сврзан со десниот идеал P и тој се совпаѓа со збирот на сите нилидеали сврзани со десниот идеал P. Ако I е идеал сврзан со десниот идеал P на прстенот R, тогаш $K(I,P)=I\cap K(R,P)$.

Дефиниција 3.3. Прстенот R се вика K-радикален прстен сврзан со десниот идеал P, ако $R=K(R,P)$.

4. ГОРНИОТ НИЛРАДИКАЛ СВРЗАН СО ЕДЕН ДЕСЕН ИДЕАЛ НА ПРСТЕНОТ $\left(Z[\sqrt{2}],+,\cdot\right)$

Нека $Z[\sqrt{2}]$ го означуваме множеството броеви од типот $x=a+b\sqrt{2}$ каде што a, b се цели броја, значи

$$Z[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Бидејќи $x,y\in Z[\sqrt{2}]\Rightarrow x-y,\ xy\in Z[\sqrt{2}]$, имаме дека $\left(Z[\sqrt{2}],+,\cdot\right)$ е потпрстен на прстенот R на реалните броеви.
Со $P[\sqrt{2}]$ го означуваме множеството $\left\{a+b\sqrt{2}|a=2r,b=2s,r,s\in Z\right\}$. Јасно е дека $P[\sqrt{2}]=\{2x|x\in Z[\sqrt{2}]\}$.

Теорема 4.1. *Множеството* $P[\sqrt{2}]$ *е десен идеал во прстенот* $\left(Z[\sqrt{2}],+,\cdot\right)$.

Со $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ го означуваме множеството на броевите $x\in Z[\sqrt{2}]$ такви што $x^n\in P[\sqrt{2}]$ за секој природен број $n\geq 2$, т.е.

$$\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])=\{x\in Z[\sqrt{2}]|\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ x^n\in P[\sqrt{2}]\}. \tag{1}$$

Теорема 4.2. *Множеството* $P[\sqrt{2}]$ *е вистинско подмножество на множеството* $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$.

Навистина, важат тврдењата:

1. $\forall p\in P[\sqrt{2}]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, имаме $p^n=(2x)^n=2(2^{n-1}x^n)=2y\in P[\sqrt{2}]$, бидејќи $Z[\sqrt{2}]$ е прстен, па $y=2^{n-1}x^n\in Z[\sqrt{2}]$. Значи,

$$\forall p\in P[\sqrt{2}],\ p^n\in P[\sqrt{2}]za\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2. \tag{2}$$

2. Земаме $x=a+b\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$, каде $a=2r$, $b=2s+1$ и $r,s\in Z$. Бидејќи b не е парен, $x\notin P[\sqrt{2}]$. Сепак добиваме $x^2\in P[\sqrt{2}]$, поради $x^2=\left(a+b\sqrt{2}\right)^2=a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2=2[(2r^2+b^2)+2rb\sqrt{2}]\in P[\sqrt{2}]$.
Со математичка индукција се докажува дека $x^n\in P[\sqrt{2}]$ за $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Значи,

$$\forall x=2r+b\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}],\ x^n\in P[\sqrt{2}]\text{ за }\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2. \tag{3}$$

Од (2) и (3)

$$P[\sqrt{2}] \subset \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}], P[\sqrt{2}]). \qquad (4)$$

Теорема 4.3. *Во* $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}], P[\sqrt{2}])$ *припаѓаат само два типа на броеви од* $Z[\sqrt{2}]$*, и тие се:*

1) броевите од типот $a + b\sqrt{2}$*, каде* $a = 2r,\ b = 2s$ *и* $r, s \in Z$*;*

2) броевите од типот $a + b\sqrt{2}$*, каде* $a = 2r,\ b = 2s + 1$ *и* $r, s \in Z$*;*

За $x = 2r + 1 + b\sqrt{2}$, каде $r,\ b \in Z$, имаме

$$x^2 = 2(2r^2 + 2r + b) + 1 + 2(2r + 1)b\sqrt{2} \notin P[\sqrt{2}]$$

Од сето тоа, кој било број $z \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}], P[\sqrt{2}])$ може да се запише како

$$z = 2r + b\sqrt{2}, \text{ каде } r,\ b \in \mathbb{Z}. \qquad (5)$$

Ако $b = 2s$, тогаш бројот z е од првиот тип, и ако $b = 2s + 1$, тогаш бројот z е од вториот тип.

Теорема 4.4. *Множеството* $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}], P[\sqrt{2}])$ *е десен идеал во прстенот* $Z[\sqrt{2}]$ *сврзан со десниот идеал* $P[\sqrt{2}]$ *.*

Доказ.

1. Според (5) за секои $z_1,\ z_2 \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ постојат $r_1, r_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, такви што $z_1 = 2r_1 + b_1\sqrt{2},\ \ z_2 = 2r_2 + b_2\sqrt{2}$. Имаме $z_1 - z_2 = (2r_1 + b_1\sqrt{2}) - (2r_2 + b_2\sqrt{2}) = 2(r_1 - r_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2}$.

Значи,

$$\forall z_1,\ z_2 \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}]),\ z_1 - z_2 \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}]).$$

2. Ако, $z \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}]),\ x \in Z[\sqrt{2}]$, тогаш $z = 2r + b\sqrt{2},\ x = c + d\sqrt{2}$, за некои $r, b, c, d \in \mathbb{Z}$, па

$$zx = 2rc + 2bd + \left(cb + 2rd\sqrt{2}\right) \in \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$$

Од Дефиниција 3.1 и Теорема 4.4, излегува дека $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ е десен нилидеал во прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со десниот идеал $P[\sqrt{2}]$.

Покрај подмножеството $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ на прстенот $Z[\sqrt{2}]$, ги разгледуваме и следниве подмножества

$I_1 = \{a + b\sqrt{2} | a = 2r, b = 2s \text{ и } r, s \in \mathbb{Z}\}$,

$I_2 = \{a + b\sqrt{2} | a = 2r \text{ и } r, b \in \mathbb{Z}\}$,

Бидејќи $I_1 = P[\sqrt{2}]$, според (2), произлегува дека I_1 е десен нилидеал во $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со $P[\sqrt{2}]$. Бидејќи и $I_2 = \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$, тогаш според теорема 4, имаме дека и I_2 е десен нилидеал во $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со $P[\sqrt{2}]$. Впрочем, имајќи ја предвид теорема 3, тие се единствените такви нилидеали. Додека, имајќи ја предвид теорема 2, имаме $I_1 + I_2 = \mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$. И за крај, нилидеалот $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ е збир на сите десни нилидеали на прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзани со десниот идеал $P[\sqrt{2}]$. Бидејќи $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$

е најголемиот нилидеал во прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со десниот идеал $P[\sqrt{2}]$, тогаш според дефиницијата на горниот нилрадикал сврзан со еден десен идеал, излегува дека $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],\ P[\sqrt{2}])$ **е горен нилрадикал на прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со десниот идеал $P[\sqrt{2}]$.**

Забелешка: Бидејќи прстенот $Z[\sqrt{2}]$ е комутативен прстен, ние наместо за десни нилидеали можеме да зборуваме само за нилидеали и за $\mathcal{N}(Z[\sqrt{2}],$ $P[\sqrt{2}])$ можеме да кажеме дека е **горен нилрадикал на прстенот $Z[\sqrt{2}]$ сврзан со идеалот $P[\sqrt{2}]$.**

REFERENCES

[1] B. J. Gardner, R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, Marcel Dekker, Inc. Neë York-Basel, 2004.
[2] N. J. Divinsky, Rings and Radicals, 1965.
[3] Андрунакиевич В. А, Рябухин Ю. М., *Радикалы алгебр и структурная теория,* М. Наука , 1979.
[4] Dr. E. Ademaj, Dr. E. Gashi, *Algjebra e përgjithshme*, Prishtinë, 1986.
[5] B. Gazidede, Algjebra 1, Tiranë, 2006.
[6] A. Jusufi, *Radikalet e algjebrave lidhur me një ideal te djathtë* , punim magjistrature, Prishtinë, 2006.
[7] K. Filipi, *Algjebra dhe Gjeometria*, Tiranë, 2005.
[8] Ю. А. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры, Москва, 1990.*
[9] A. Jusufi, *Nilradikali i poshtëm lidhur me një ideal të djathtë*, Buletini shkencor UNIEL, Elbasan, 2007/1, str.145-156.
[10] M.Ferrero and E.R. Puczylowski, T*he Singular Ideal and Radicals*, J.Austral. Math. Soc. 64 - 1998.
[11] Kon P., *Universal algebra* , New York - Evanston-London, 1965.
[12] P.Petro, *Strukturat algjebrike*, Tiranë-2007

*Државен Универзитет во Тетово
E-mail address: `azir.jusufi@unite.edu.mk`

**Политехнички Универзитет во Тирана
E-mail address: `f_kristaq@hotmail.com`