Математички Билтен ISSN 0351-336X
32 (LVIII)
2008 (57-64)
Скопје, Македонија

ЗА ЕДНА КЛАСА МАТРИЧНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ЧИЕ ОПШТО РЕШЕНИЕ Е ПОЛИНОМ

БОРО М. ПИПЕРЕВСКИ

Апстракт. Во овој труд се разгледува една класа матрични диференцијални равенки. За таа класа се добиени потребни и доволни услови за општо решение полином. При тоа е добиена и соодветната формула за општото решение.

Нека е дадена матрична линеарна диференцијална равенка од вид:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}'+\mathbf{M}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{0}, \tag{1}$$

каде

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} t-a & 0 \\ 0 & t-b \end{bmatrix},\ \mathbf{M}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{X}'=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{X}$ - матрична функција, $A, B, C, D, a, b,$ се реални броеви, $x_1(t), x_2(t)$ реални функции од една реална променлива t и $x_1'(t), x_2'(t)$ нивни први изводи.

Дефиниција. Равенката (1) има полиномно решение од степен n ако матрицата $\mathbf{X}_n=\begin{bmatrix} P_n(t) \\ Q_n(t) \end{bmatrix}$, каде $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ се полиноми од степен n, е решение на равенката (1).

Лема. Равенката (1) со трансформацијата дефинирана со $\mathbf{X}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}$, каде $\mathbf{Y}$ е новата матрична функција и

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} (t-a)^{-A}(t-b)^{1-D} & 0 \\ 0 & (t-a)^{1-A}(t-b)^{-D} \end{bmatrix}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34 - A05.
Key words and phrases. Matricna diferencijalna ravenka, polinomni resenija.

е матрицата на трансформацијата, се трансформира во равенка од иста форма

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Y}' + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0},$$

каде

$$\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{cc} t-b & 0 \\ 0 & t-a \end{array} \right], \mathbf{M}_1 = \left[\begin{array}{cc} 1-D & B \\ C & 1-A \end{array} \right].$$

Доказ: Со директна замена.

Теорема 1. Равенката (1) со условот $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, има едно ненулто решение константа ако и само ако $r(\mathbf{M}) = 1$ ($r(\mathbf{M})$ е ранг на матрицата $\mathbf{M}$). При тоа решението е дадено со формулата $\mathbf{X}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{A}{B} \end{array} \right]$.

Доказ:

Нека $\mathbf{X}^* = \mathbf{K}, \mathbf{K} = \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right]$, $k_1, k_2 \neq 0$, е ненултото решение константа на равенката (1). Со директна замена во равенката (1) се добива равенката $\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{0}$. Значи матричната алгебарска равенка $\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$ има ненулто решение $\mathbf{W}_1 = \mathbf{K}$ и според теоремата на Кронекер Капели за хомогени линеарни алгебарски системи $r(\mathbf{M}) = 1$ (($r(\mathbf{M}) > 0$, $r(\mathbf{M}) < 2$).

Нека $r(\mathbf{M}) = 1$. Тогаш матричната алгебарска равенка $\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$, има барем едно ненулто решение $\mathbf{W}_1 = \mathbf{K}$, $\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right]$, $k_1, k_2 \neq 0$, за кое $\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{0}$. Бидејќи $\mathbf{K}$ е константа матрица, $\mathbf{X}^* = \mathbf{K}$ е ненултото решение константа на равенката (1). Формулата за тоа решение се добива од матричната алгебарска равенка $\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$.

Теорема 2. Равенката (1) со условот $A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot (A \cdot D - B \cdot C) \neq 0$, има едно полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n ако и само ако постои природен број n така што $r(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) = 1$,$r(\mathbf{M} + k\mathbf{E}) = 2$, $k < n, k-$ природен број, $\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$.

При тоа решението е дадено со формулата

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}_2^{-1} \cdot [\mathbf{T}_1^{-1} \cdot \mathbf{K}]^{(\mathbf{n})}, \tag{2}$$

каде $\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{A+n}{B} \end{array} \right]$,

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \left[\begin{array}{cc} (t-a)^{A+n}(t-b)^{D+n-1} & 0 \\ 0 & (t-a)^{A+n-1}(t-b)^{D+n} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} (t-a)^{-A}(t-b)^{1-D} & 0 \\ 0 & (t-a)^{1-A}(t-b)^{-D} \end{bmatrix}.$$

Доказ: Нека $\mathbf{X}_n$ е едно полиномно решение на равенката (1) од степен n и нека нема друго полиномно решение со степен помал од n. Со n последователни диференцирања на равенката (1) се добива равенката

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}^{(n+1)} + (\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Со замена $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n$ во последната равенка (3) се добива идентитет $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_n^{(n+1)} + (\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}_n^{(n)} = \mathbf{0}$, односно $(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, $k_1, k_2 \neq 0$, бидејќи $\mathbf{X}_n^{(n+1)} = \mathbf{0}, \mathbf{X}_n^{(n)} = \mathbf{K} \neq \mathbf{0}$. Според тоа алгебарската матрична равенка $(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$ има ненулто решение $\mathbf{W}_1 = \mathbf{K}$ што значи $r(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) = 1$. Бидејќи матричната равенка по услов нема полиномно решение од степен помал од n следи $r(\mathbf{M}+k\mathbf{E}) = 2$, $k < n, k-$ природен број.

Нека постои природен број n така што $r(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) = 1$,$r(\mathbf{M} + k\mathbf{E}) = 2$, $k < n, k-$ природен број. Со n последователни диференцирања на равенката (1) се добива равенката (3). Нека ја разгледаме алгебарската матрична равенка $(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Од условот $r(\mathbf{M} + n\mathbf{E}) = 1$ следи дека таа има ненулто решение $\mathbf{W}_1 = \mathbf{K}$, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, $k_1, k_2 \neq 0$. Ако ставиме $\mathbf{X}^{*(n)} = \mathbf{K}$ го добиваме идентитетот $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}^{*(n+1)} + (\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}^{*(n)} = \mathbf{0}$, бидејќи $\mathbf{K}$ е константа матрица. Во согласност со постапката од $\mathbf{X}^{*(n)} = \mathbf{K}$ се добива дека $\mathbf{X}^*$ е матрица полином од степен n и е решение на равенката (1). Ако претпоставиме дека равенката (1) има и друго полиномно решение $\mathbf{X}_k$ од степен $k < n$, тогаш по k последователни диференцирања на равенката (1) се доаѓа до равенката $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_k^{(k+1)} + (\mathbf{M} + k\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}_k^{(k)} = \mathbf{0}$, односно алгебарската матрична равенка $(\mathbf{M}+k\mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} = \mathbf{0}$, каде $\mathbf{X}_k^{(k)} = \mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, што е во противречност со претпоставката $r(\mathbf{M} + k\mathbf{E}) = 2$.

Нека се задоволени условите од теоремата и нека ја разгледаме диференцијалната матрична равенка $\mathbf{P} \cdot \mathbf{U}' + (\mathbf{M} + n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}$. Според теорема 1 таа има едно ненулто решение константа дадено со $\mathbf{U_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A+n}{B} \end{bmatrix}$. Со трансформацијата $\mathbf{U} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{V}$,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} (t-a)^{-(A+n)}(t-b)^{1-(D+n)} & 0 \\ 0 & (t-a)^{1-(A+n)}(t-b)^{-(D+n)} \end{bmatrix},$$

оваа равенка според лема 1 се трансформира во равенката $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{V}'+\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{V}=\mathbf{0}$, каде

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} t-b & 0 \\ 0 & t-a \end{bmatrix},\ \mathbf{M}_2=\begin{bmatrix} 1-D-n & B \\ C & 1-A-n \end{bmatrix}.$$

Со n последователни диференцирања на последната равенка се добива равенката $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{V}^{(n+1)}+(\mathbf{M}_2+n\mathbf{E})\cdot\mathbf{V}^{(n)}=\mathbf{0}$, од каде после смената $\mathbf{V}^{(n)}=\mathbf{Z}$ се добива равенката $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{Z}'+(\mathbf{M}_2+n\mathbf{E})\cdot\mathbf{Z}=\mathbf{0}$. На крајот со трансформацијата $\mathbf{Z}=\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{X}$,

$$\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix} (t-a)^A(t-b)^{D-1} & 0 \\ 0 & (t-a)^{A-1}(t-b)^D \end{bmatrix},$$

во последната равенка , според лема 1, се добива равенката (1). Во согласност со смените, трансформациите и постапката, за полиномното решение на равенката (1) се добива формулата (2).

Теорема 3. Равенката (1) со условот $A\cdot B\cdot C\cdot D\neq 0$, има едно ненулто полиномно решение константа и второ полиномно решение од степен m ако и само ако $r(\mathbf{M})=1$ и постои природен број m така што $A+D+m=0$ или $r(\mathbf{M}+m\mathbf{E})=1$ и $-A,-D-$природни броеви. При тоа општото решение е дадено со формулата

$$\mathbf{X}=C_1\mathbf{X}_1+C_2\mathbf{X}_2, \tag{4}$$

каде $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A}{B} \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix} B\int(t-a)^{-A-1}(t-b)^{-D}dt \\ D\int(t-a)^{-A}(t-b)^{-D-1}dt \end{bmatrix}$, C_1, C_2 произволни константи.

Доказ: Нека равенката (1) има едно ненулто полиномно решение константа и второ полиномно решение од степен m. Од теорема 1 следи $r(\mathbf{M})=1$ и обратно со тоа што $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A}{B} \end{bmatrix}$.

Равенката од вид $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{Y}'+\mathbf{M}_3\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{0}$, каде

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} t-b & 0 \\ 0 & t-a \end{bmatrix},\ \mathbf{M}_3=\begin{bmatrix} -D & B \\ C & -A \end{bmatrix},$$

според теорема 1 има едно ненулто решение константа $\mathbf{Y}_1=\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$.

Со трансформацијата,$\mathbf{Y}=\mathbf{T}_3\cdot\mathbf{Z}$,

$$\mathbf{T}_3=\begin{bmatrix} (t-a)^{A+1}(t-b)^D & 0 \\ 0 & (t-a)^A(t-b)^{D+1} \end{bmatrix},$$

според лема1 се добива равенката

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}'+(\mathbf{M}+\mathbf{E})\cdot\mathbf{Z}=\mathbf{0}. \tag{5}$$

Од друга страна ако равенката (1) се диференцира еднаш се добива $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}" + (\mathbf{M}+\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}' = \mathbf{0}$ од каде со споредба со последната равенка (5) важи $\mathbf{X}' = \mathbf{Z}$. Во согласност со соодветната смена и оваа врска, за едно решение на равенката (5) се добива $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{T}_3^{-1}\cdot\mathbf{Y}_1$, и за второ решение на равенката (1) се добива $\mathbf{X}_2 = \int \mathbf{T}_3^{-1}\cdot\mathbf{Y}_1 dt$ од каде следи формулата за второто решение

$$\mathbf{X}_2 = \int \mathbf{T}_3^{-1}\cdot\mathbf{Y}_1 dt = \begin{bmatrix} B\int (t-a)^{-A-1}(t-b)^{-D}dt \\ D\int (t-a)^{-A}(t-b)^{-D-1}dt \end{bmatrix}.$$

За да биде оваа решение полином од степен m треба да важи $A+D+m=0$, $-A,-D-$природни броеви. Тогаш општото решение е полином даден со формулата (4).

Теорема 4. Равенката (1) со условот $A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot(A\cdot D - B\cdot C)\neq 0$, има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви n и m така што $r(\mathbf{M}+n\mathbf{E}) = 1$, $A+D+2n+m=0$ или $r(\mathbf{M}+(n+m)\mathbf{E}) = 1$ и $-(A+n), -(D+n)-$природни броеви. При тоа општото решение е дадено со формулата

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_n + C_2\mathbf{X}_{n+m}, \tag{6}$$

каде

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}_2^{-1}\cdot[\mathbf{T}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}]^{(n)}, \mathbf{X}_{n+m} = \mathbf{T}_2^{-1}\cdot[\mathbf{T}_1^{-1}\cdot\mathbf{Q}]^{(n)}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A+n}{B} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \int (t-a)^{-(A+n)-1}(t-b)^{-(D+n)}dt \\ -\frac{A+n}{B}\int (t-a)^{-(A+n)}(t-b)^{-(D+n)-1}dt \end{bmatrix},$$

C_1, C_2 произволни константи.

Доказ: Нека равенката (1) има општо решение полином при што едно полиномно решение $\mathbf{X}_n$ од степен n и второ полиномно решение $\mathbf{X}_{n+m}$ од степен $n+m$. Тогаш според теорема 2 важи $r(\mathbf{M}+n\mathbf{E}) = 1$ и

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}_2^{-1}\cdot[\mathbf{T}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}]^{(n)}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A+n}{B} \end{bmatrix}.$$

Понатаму по n последователни диференцирња на равенката (1) се добива равенката $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}^{(n+1)} + (\mathbf{M}+n\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{0}$. Со смена $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{Y}$ се добива равенката $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}' + (\mathbf{M}+n\mathbf{E})\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, која согласно смената има едно ненулто решение константа $\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{A+n}{B} \end{bmatrix}$ и второ полиномно решение од степен m. Тогаш според теорема 3 важат условите $r(\mathbf{M}+n\mathbf{E}) = 1$, $A+D+2n+m=0$ или $r(\mathbf{M}+(n+m)\mathbf{E}) = 1$ и $-(A+n), -(D+n)-$природни броеви.

Нека се задоволени условите од теоремата. Тогаш според теорема 2 равенката (1) има полиномно решение од степен n, а според теорема 3 равенката $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}'+(\mathbf{M}+n\mathbf{E})\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{0}$, има полиномно решение од степен m и согласно смената $\mathbf{X}^{(n)}=\mathbf{Y}$ равенката (1) има полиномно решение од степен $n+m$. Во согласност со формулата за соодветното второ решение од теорема 3, за второто полиномно решение од степен $n+m$ на равенката (1) се добива формулата $\mathbf{X}_{n+m}=\mathbf{T}_2^{-1}\cdot[\mathbf{T}_1^{-1}\cdot\mathbf{Q}]^{(n)}$ каде

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} B\int(t-a)^{-(A+n)-1}(t-b)^{-(D+n)}dt \\ -\frac{A+n}{B}\int(t-a)^{-(A+n)}(t-b)^{-(D+n)-1}dt \end{bmatrix}.$$

Забелешка 1: Од условот $r(\mathbf{M}+n\mathbf{E})=1$ се добива равенката $(A+n)\cdot(D+n)-B\cdot C=0$, од каде се добива квадратната равенка $x^2+(A+D)\cdot x+A\cdot D-B\cdot C=0$, која се нарекува карактеристична равенка за матричната равенка (1). Всушност во случаите кога равенката (1) има полиномно решение, степенскиот показател е корен на оваа равенка. Корените се и карактеристични (сопствени) вредности на матрицата $\mathbf{M}$.

Забелешка 2. Матричната равенка (1) се доведува до матрична линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид:

$$\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{X}"+\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{X}'+\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{X}=\mathbf{0},$$

каде

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}(t-a)(t-b) & 0\\ 0 & (t-a)(t-b)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}_0=\begin{bmatrix}AD-BC & 0\\ 0 & AD-BC\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}(A+D+1)t-(A+1)b-aD & 0\\ 0 & (A+D+1)t-(D+1)a-bA\end{bmatrix}.$$

Полиномното решение на равенката (1) ке биде и едно полиномно решение и на оваа матрична равенка.

Пример 1. Равенката $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}'+\mathbf{M}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{0}$, каде $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}t-1 & 0\\ 0 & t-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$, има општо полиномно решение

$$\mathbf{X}=C_1\begin{bmatrix}12t^2-32t+22\\ 12t^2-40t+34\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}(t-2)^4\\ (t-1)^4\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Равенката на Лежандр

$$(t-1)(t+1)x_1"+2tx_1'-n(n+1)x_1=0$$

која има само едно полиномно решение од степен n (класичен полином на Лежандр), може да се сведе на матричната равенка $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}'+\mathbf{M}_1\cdot$

$\mathbf{X} = \mathbf{0}$, каде $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & n \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$, или на друга матрична равенка $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}' + \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$, каде $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & n+1 \\ n & 1 \end{bmatrix}$. При тоа втората компонента $x_2(t)$ на матричната функција овозможува да се добие диференцијална равенка

$$(t-1)(t+1)x_2" + 2(t-1)x_2' - n(n+1)x_2 = 0,$$

која има исто така решение полином придружен на класичните полиноми на Лежандр.

Да забележиме дека во овој случај не е задоволен условот $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$.

Литература

[1] Boro M.Piperevski, *Sur une formule de solution polinomme d'une classe d'equations differentielles lineaires du duxieme ordre*, Bulletin de la Societe des mathematiciens et des informaticiens de Macedoine, tome 7- 8 (23- 24), p. 10- 15 (1983/84) , Skopje.

[2] Boro M.Piperevski, *On existence and construction of a general polynomial solution of a class of second order differential equations' systems*, Bulletin de la Societe des mathematiciens de Macedoine tome 25, p 43 - 48, 2001, Skopje.

[3] Boro M.Piperevski, *On existence and construction of a polynomial solution of a class of second order differential equations' systems*, Bulletin de la Societe des mathematiciens de Macedoine tome 25, p. 37 - 42, 2001, Skopje.

[4] Ilija A.Shapkarev, Boro M.Piperevski, Elena I. Hadzieva, Nevena Serafimova, Katerina Mitkovska-Trendova, *About a class of second order differential equations, whose general solution is polynomial*, Седми Македонски симпозиум по диференцијални равенки , Зборник на трудови,(27 - 40), 2002.
http://cim.feit.ukim.edu.mk

[5] Boro M.Piperevski, Nevena Serafimova, *Existence and construction of the general solution of a class of second order differential equations with polynomial coefficients*, Седми Македонски симпозиум по диференцијални равенки , Зборник на трудови, (41 - 52), 2002.
http://cim.feit.ukim.edu.mk

ON A CLASS OF MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS WHOSE GENERAL SOLUTION IS POLYNOMIAL

Boro. M. Piperevski

Summary

In this article a class of matrix differential equations we observe. The necessary and sufficient conditions, under which this class has a general polynomial solution, are obtained. The formula of that general polynomial solution is also obtained.

University "Ss Ciril and Methodius", Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies, Karpos, P.O.Box 574, 1000 Skopje, Republic of Macedonia,

E-mail address: borom@feit.ukim.edu.mk