Математички Билтен ISSN 0351–336X
30 (LVI)
2006 (31–36)
Скопје, Македонија

ЗА ЕДНА КЛАСА НА ЛИНЕАРНИ ОПЕРАТОРИ

Алекса Малчески

Апстракт

Во [1] е е воведен поимот за 2-норма а во [2] е направена еквивалентна дефинција на 2-норма. Во оваа работа ќе разгледаме една класа на ограничени линеарни оператори кои се генерирани со ограничен 2-линеарен оператор.

Во својата работа Lineare 2-normierte raume, [1] S. Gähler ја има дадено следната дефиниција за 2-нормиран простор.

Нека X е векторски простор над полето Φ со $\dim X > 1$ и $\|\cdot,\cdot\|\colon X\times X\to \mathbf{R}$ е функција која ги задоволува условите:

(i) $\|x,y\|=0$ ако и само ако $\{x,y\}$ е линеарно зависно множество.
(ii) $\|x,y\|=\|y,x\|$, за секои $x,y\in X$
(iii) $\|\alpha x,y\|=|\alpha|\,\|x,y\|$, $\alpha\in\Phi$, $x,y\in X$
(iv) $\|x+x',y\|\le\|x,y\|+\|x',y\|$, за секои $x,x',y\in X$.

Функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ ја нарекуваме 2-норма на векторскиот простор X, а $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ го нарекуваме 2-нормиран простор.

Непосредна последица од дефинцијата се следните две леми.

Лема 1. Ако $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор, тогаш $\|x,y\|\ge 0$ за секои $x,y\in X$.

Лема 2. Ако $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор, тогаш $\|x,y\|=\|x,y+\alpha x\|$ за секои $x,y\in X$ и за секој скалар α.

Како последица од дефинцијата на 2-нормиран простор и претходните две леми во [2] е докажано дека следните услови $(P1)$–$(P3)$ се еквивалентни со дефинцијата на 2-нормиран простор.

$(P1)$ Ако $\|x,y\|=0$, тогаш $\{x,y\}$ е линеарно зависно подмножество од X

$(P2)$ $\|A(x,y)^T\| = |\det A|\,\|x,y\|$, за $A \in M_2(\Phi)$ и $x,y \in X$
$(P3)$ $\|x+x',y\| \leq \|x,y\| + \|x',y\|$ за $x,x',y \in X$.

Да забележиме дека под множењето $A(x,y)^T = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ подразбираме множење на ист начин како што е определено множење на матрица со вектор колона, односно

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}(x,y)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y),$$

за $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\Phi)$ и $(x,y \in X^2$. На овој начин имплицитно е воведена операција $\cdot\colon M_2(\Phi) \times X^2 \to X^2$, која заради удобност на записите понатаму ќе ја користиме.

Скоро во сите работи од 2-нормирани простори како класа од линеарни пресликувања кои се разгледуваат се билинеараните функционали. Се покажува дека билинеарните функционали не се согласни со аксиомите за 2-нормиран простор. Во [3] е разгледано подмножество од множеството билинеарни функционали, односно множеството алтернативни линеарни функционали на $X \times X$ кои во истата работа се наречени 2-линеарни функционали. Во оваа работа под слични услови како во [3] ќе ги разгледаме пресликувањата од 2-нормираниот X во нормираниот простор X, при што нормата и 2-нормата на X го задоволуваат условот

$$\|x,y\| \leq K\|x\|\,\|y\|, \quad x,y \in X, \tag{1}$$

каде што K е константа која што не зависи од векторите x и y.

Ограничени 2-линеарни оператори

Нека X е векторски простор. Со Δ_2 ќе го означиме множеството од сите подредени парови (x,y), $x,y \in X$, такви што множеството $\{x,y\}$ е линеарно зависно множество.

Дефиниција. За пресликувањето $\Lambda\colon X^2 \to X$ кое ги задоволува условите

$$\Lambda\big(A(x,y)^T\big) = (\det A)\Lambda(x,y),$$
$$\Lambda(x+x',y) = \Lambda(x,y) + \Lambda(x',y)$$

за $x,x',y \in X$ и $A \in M_2(\Phi)$ велиме дека е 2-линеарен оператор на векторскиот простор X.

Множеството од сите 2-линеарни оператори на векторскиот простор X ќе го означуваме со $L(X^2,X)$.

Дефинција. За 2-линеарниот оператор на векторскиот простор X, кој е нормиран и 2-нормиран векторски простор што го исполнува условот

$$\sup_{(x,y)\notin\Delta_2} \frac{\|\Lambda(x,y)\|}{\|x,y\|} < +\infty,$$

велиме дека е ограничен. Бројот $\|\Lambda\| = \sup\limits_{(x,y)\notin\Delta_2} \frac{\|\Lambda(x,y)\|}{\|x,y\|}$ го нарекуваме норма на 2-линеарниот оператор.

Множеството од сите ограничени 2-линеарни оператори на векторскиот простор X кој е нормиран и 2-нормиран векторски простор ќе го означуваме со $B(X^2, X)$.

Лема 3. Ако $\Lambda\colon X^2 \to X$ е 2-линеарен оператор тогаш $\Lambda(\alpha x, y) = \alpha\Lambda(x,y) = \Lambda(x, \alpha y)$.

Доказ. Од дефинцијата на 2-линеарен оператор,

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha x, y) &= \Lambda\left(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}(x,y)\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\Lambda(x,y) = \alpha\Lambda(x,y)\\ &= \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}\right)\Lambda(x,y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}(x,y)^T\right) = \Lambda(x, \alpha y).\end{aligned}$$

Според тоа, секој 2-линеарен оператор е хомоген по секоја од променливите поодделно.

Лема 4. Ако $\Lambda\colon X^2 \to X$ е 2-линеарен оператор, тогаш $\Lambda(x,y) = -\Lambda(y,x)$.

Доказ. Непосредно од дефинцијата за 2-линеарен оператор, имаме

$$\Lambda(x,y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(y,x)^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(x,y) = -\Lambda(y,x).$$

Според тоа, секој 2-линеарен оператор е алтернативен.

Една класа на 2-линеарни оператори од X во $B(X)$

Во овој дел ќе сметаме дека X е 2-нормиран и нормиран простор, при што 2-нормата и нормата го задоволуваат условот (1).

Лема 5. Нека X е векторски простор со $\dim X > 1$, $\Lambda\colon X^2 \to X$ е линеарен оператор при што $(X^2, \|\cdot,\cdot\|)$ и $(X, \|\cdot\|)$ и 2-нормата и нормата се поврзани како во (1). Ако Λ е ограничен 2-линеарен оператор, тогаш $\Lambda_{y_0}\colon X \to X$, определен со

$$\Lambda_{y_0}(x) = \Lambda(x, y_0),$$

е ограничен линеарен оператор во $(X, \|\cdot\|)$.

Доказ. Од дефинцијата на 2-линеарен оператор, за произволни $x, x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in \Phi$ имаме

$$\lambda_{y_0}(x_1 + x_2) = \Lambda(x_1 + x_2, y_0) = \Lambda(x_1, y_0) + \Lambda(x_2, y_0) = \Lambda_{y_0}(x_1) + \Lambda_{y_0}(x_2),$$

$$\Lambda_{y_0}(\alpha x) = \Lambda(\alpha x, y_0) = \alpha\Lambda(x, y_0) = \alpha\Lambda_{y_0}(x).$$

Значи, Λ_{y_0} е линеарен оператор. Од друга страна

$$\|\Lambda_{y_0}(x)\| = \|\Lambda(x,y_0)\| \le \|\Lambda\|\,\|x,y_0\| \le \|\Lambda\|K\|x\|\,\|y_0\| = (\,\|\Lambda\|K\|y_0\|\,)\|x\|,$$

од каде што гледаме дека Λ_{y_0} е ограничен линеарен оператор.

Лема 6. Нека X е векторски простор со $\dim X > 1$, кој е 2-нормиран и нормиран простор, при што 2-нормата $\|,\cdot,\cdot\|$ и нормата $\|\cdot\|$ се поврзани како во (1). Ако $\Lambda\colon X^2 \to X$ е ограничен 2-линеарен оператор, тогаш пресликувањето $\psi\colon X \to B(X)$ определено со

$$\psi(y) = \Lambda_y$$

е ограничен линеарен оператор.

Доказ. Нека $y_1, y_2 \in X$ се произволно зададени. Тогаш за произволен $x \in X$, имаме

$$\begin{aligned}\psi(y_1+y_2)(x) &= \Lambda_{y_1+y_2}(x) = \Lambda(x,y_1+y_2) = \Lambda(x,y_1) + \Lambda(x,y_2)\\ &= \Lambda_{y_1}(x) + \Lambda_{y_2}(x) = (\Lambda_{y_1}+\Lambda_{y_2})(x) = \big[\psi(y_1)+\psi(y_2)\big](x)\,.\end{aligned}$$

Од произволноста на $x \in X$ добиваме $\psi(y_1+y_2) = \psi(y_1) + \psi(y_2)$, односно ψ е адитивен оператор. За $\alpha \in \Phi$, $y \in X$, и за произволен $x \in X$ имаме

$$\psi(\alpha y)(x) = \Lambda_{\alpha y}(x) = \Lambda(x,\alpha y) = \alpha\Lambda(x,y) = \alpha\Lambda_y(x) = (\alpha\Lambda_y)(x) = \big[\alpha\psi(y)\big](x).$$

Од произволноста на $x \in X$, добиваме $\psi(\alpha y) = \alpha\psi(y)$, односно ψ е хомоген оператор. Според тоа ψ е линеарен оператор.

Од друга страна, $\|\psi(y)\| = \|\Lambda_y\| \le K\|\Lambda\|\,\|y\|$, па според тоа ψ е ограничен линеарен оператор и неговата норма е помала од $K\|\Lambda$, т.е. $\|\psi\| \le K\|\Lambda\|$.

Забелешка. Бидејќи операторот ψ е определен со 2-линеарниот оператор $\Lambda \in B(X^2, X)$ него ќе го означуваме со $\psi = \psi_\Lambda$.

Лема 7. Нека X е векторски простор со $\dim X > 1$, кој е 2-нормиран и нормиран простор, при што 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ и нормата $\|\cdot\|$ се поврзани како во (1). Пресликувањето $\Theta\colon B(X^2,X) \to B\big(X, B(X)\big)$ определено со $\Theta(\Lambda) = \psi_\Lambda$ е ограничен линеарен оператор кој е инјективен.

Доказ. Нека $\Lambda_1, \Lambda_2 \in B(X^2, X)$ и $y \in X$ е зададен вектор. Тогаш за произволен $x \in X$ имаме

$$\begin{aligned}\big[\psi_{\Lambda_1+\Lambda_2}(y)\big](x) &= (\Lambda_1+\Lambda_2)_y(x) = (\Lambda_1+\Lambda_2)(x,y) = \Lambda_1(x,y) + \Lambda_2(x,y)\\ &= \Lambda_{1,y}(x) + \Lambda_{2,y}(x) = \big[\psi_{\Lambda_1}(y)\big](x) + \big[\psi_{\Lambda_2}(y)\big](x)\\ &= \big[\psi_{\Lambda_1}(y) + \psi_{\Lambda_2}(y)\big](x) = \big[(\psi_{\Lambda_1}+\psi_{\Lambda_2})(y)\big](x).\end{aligned}$$

Од произволноста на $x \in X$, добиваме $\psi_{\Lambda_1+\Lambda_2}(y) = (\psi_{\Lambda_1}+\psi_{\Lambda_2})(y)$, а од произволноста на $y \in X$ следува

$$\psi_{\Lambda_1+\Lambda_2} = \psi_{\Lambda_1} + \psi_{\Lambda_2}.$$

Според тоа,

$$\Theta(\Lambda_1+\Lambda_2) = \psi_{\Lambda_1+\Lambda_2} = \psi_{\Lambda_1} + \psi_{\Lambda_2} = \Theta(\Lambda_1) + \Theta(\Lambda_2).$$

односно Θ е адитивен оператор.

Нека $\alpha \in \Phi$, $\Lambda \in B(X^2, X)$. За сликата на 2-линеарниот оператор $\alpha\Lambda$, $\psi_{\alpha\Lambda}$, имаме

$$\begin{aligned}\big[\psi_{\alpha\Lambda}(y)\big](x) &= (\alpha\Lambda)_y(x) = (\alpha\Lambda)(x,y) = \alpha\Lambda(x,y) = \alpha\Lambda_y(x)\\ &= \alpha\big[\psi_\Lambda(y)\big](x) = \big[\alpha\psi_\Lambda(y)\big](x) = \big[(\alpha\psi_\Lambda)(y)\big](x).\end{aligned}$$

Од произволноста на $x \in X$ добиваме $\psi_{\alpha\Lambda}(y) = (\alpha\psi_\Lambda)(y)$, а од произволноста на $y \in X$ имаме $\psi_{\alpha\Lambda} = \alpha\psi_\Lambda$. Од дефинцијата на операторот Θ следува

$$\Theta(\alpha\Lambda) = \psi_{\alpha\Lambda} = \alpha\psi_\Lambda = \alpha\Theta(\Lambda).$$

Според тоа Θ е хомоген оператор.

Од неравенството $\|\psi_\Lambda\| \le K\|\Lambda\|$, добиваме

$$\|\Theta(\Lambda)\| = \|\psi_\Lambda\| \le K\|\Lambda\|.$$

Според тоа Θ е ограничен линеарен оператор.

Нека $\Lambda_1, \Lambda_2 \in B(X^2, X)$ за кои $\Theta(\Lambda_1) = \Theta(\Lambda_2)$. Тогаш $\Theta(\Lambda_1) - \Theta(\Lambda_2) = 0$, т.е. $\Theta(\Lambda_1 - \Lambda_2) = 0$. Од дефинцијата на Θ имаме $\psi_{\Lambda_1-\Lambda_2} = 0$, односно за произволен $y \in X$ точно е равенството $\psi_{\Lambda_1-\Lambda_2}(y) = 0$. Според тоа, за произволен $x \in X$ добиваме

$$\Lambda_1(x,y) - \Lambda_2(x,y) = (\Lambda_1-\Lambda_2)(x,y) = (\Lambda_1-\Lambda_2)_y(x) = \big[\psi_{\Lambda_1-\Lambda_2}(y)\big](x) = 0,$$

односно $\Lambda_1(x,y) = \Lambda_2(x,y)$. Од произволноста на $x, y \in X$ имаме $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Значи, Θ е инјективен.

Литература

[1] Gähler S.: *Lineare 2-normierte Raume,* Math. Nach. 28(1965)

[2] Малчески, А.: *Забелешка за дефиницијата на 2-нормиран простор,* Математички билтен, Том 26 (2002)

[3] Malčeski, A., R.: *За една класа на 2-линеарни пресликувања,* Зборник на трудови на трет конгрес на математичарите на Република Македонија, Струга, септември 2005.

[4] Malceski, A.; Malceski, R.: *L^1(μ AS A n-NORMED SPACE,* Годишен зборник на Институтот за математика, Том 38 (1997)

[5] H. Cartan: *Calcul Diffrential. Formes Diff rentielles.* Herman Paris, 1967

[6] Bourbaki N.: *Algebre, Alg bre multilin aire,* Hermann, Paris, 1948

FOR A CLASS OF LINEAR OPERATORS

Aleksa Malcheski

S u m m a r y

X is a normed and 2-normed space when norm and 2-norm are associated with the non-equation $\|x, y\| \leq K\|x\| \, \|y\|$. A class of linear operators from x to $B(x)$ is given.

Faculty of Mechanical Engineering

Univ. "St. Cyril and Methodius"

1000 Skopje

Macedonia

e-mail: aleksa@mf.edu.mk