Математички Билтен ISSN 0351–336X
30 (LVI)
2006 (17–30)
Скопје, Македонија

КАРАКТЕРИЗАЦИЈА НА 2-ПОЛУНОРМА

Алекса Малчески

Апстракт

Во [2] е е воведен поимот за 2-полунорма, а во [2] и [3] се воведени и докажани повеќе својства на н-полунормираните простори. Во оваа работа е дадена една карактеризација на 2-полунормите.

Во [2] е дадена следната дефиниција за 2-полунормиран простор.

Нека X е векторски простор со $\dim X \geq 2$ над полето скалари $\mathbf{R}$. Функцијата $p: X \times X \to \mathbf{R}$ таква, што

(i) $p(x,y) = 0$ за кои било два вектори x, y кои се линеарно зависни.

(ii) $p(x,y) = p(y,x)$, за секои $x, y \in X$

(iii) $p(\alpha x, y) = |\alpha| p(x,y)$

(iv) $p(x+x', y) \leq p(x,y) + p(x',y)$, за секои $x, x', y \in X$

ја нарекуваме 2-полунорма, а подредениот пар (X,p) го нарекуваме 2-полунормиран реален векторски простор.

Непосредно од дефиницијата за 2-полунорма следува точноста на следните тврдења.

Лема 1. Ако p е 2-полунорма на векторскиот простор X, тогаш $p(x,y) \geq 0$ за секои $x, y \in X$. $\square$

Лема 2. Ако p е 2-полунорма на векторскиот простор X, тогаш $p(x,y) = p(x, y+\alpha x)$ за секои $x, y \in X$ и за секој скалар α.

Доказ. Навистина

$$p(x,y+\alpha x)\leq p(x,y)+p(x,\alpha x)=p(x,y)+|\alpha|p(x,x)=p(x,y)+|\alpha|\cdot 0=p(x,y)$$

$$\begin{aligned}p(x,y)&=p(x,y+\alpha x-\alpha x)\leq p(x,y+\alpha x)+p(x,-\alpha x)\\&=p(x,y+\alpha x)+|-\alpha|p(x,x)=p(x,y+\alpha x)\end{aligned}$$

Значи, од претходните две неравенства $p(x,y)=p(x,y+\alpha x)$. □

Во натамошниот тек, ќе работиме под претпоставка дека X е векторски простор со димензија не помала од два.

1. Еквивалентна дефиниција на 2-полунормиран простор

Лема 3. Ако p е 2-полунорма на векторскиот простор X, тогаш $p(A(x,y)^T)=|\det A|p(x,y)$, за секои $x,y\in X$ и за која било матрица $A\in M_2(\Phi)$.

Забелешка. Имплицитно е воведена операција

$$A(x,y)^T=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(a_{11}x+a_{12}y,a_{21}x+a_{22}y),$$

каде

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in M_2(\Phi).$$

За вака воведената операција точно е равенството

$$A\big(B(x,y)^T\big)^T.$$

Доказ на лема 3. Ќе разгледаме два случаи и тоа $\det A=0$ и $\det A\neq 0$.

Ако $\det A=0$, тогаш векторите од парот вектори $A(x,y)^T$ се линеарно зависни, па според својството (i) од дефиницијата за 2-полунорма

$$p\big(A(x,y)^T\big)=0=0\cdot p(x,y)=|\det A|p(x,y)\,.$$

Ако $\det A\neq 0$ и $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, тогаш $a_{11}\neq 0$ или $a_{12}\neq 0$. Воведуваме ознака $\Delta=\det A$ и без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$. Користејќи ја дефиницијата за 2-полунорма и лема 2 добиваме:

$$\begin{aligned}
p\big(A(x,y)^T\big) &= p(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)\\
&= p\Big(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y)\Big)\\
&= p\Big(a_{11}x + a_{12}y, a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}y\Big) = p\Big(a_{11}x + a_{12}y, \frac{\Delta}{a_{11}}y\Big)\\
&= p\Big(a_{11}x + a_{12}y - \frac{a_{21}a_{11}}{\Delta}\Big(\frac{\Delta}{a_{11}}y\Big), \frac{\Delta}{a_{11}}y\Big) = p\Big(a_{11}x, \frac{\Delta}{a_{11}}y\Big)\\
&= |a_{11}|p\Big(x, \frac{\Delta}{a_{11}}y\Big) = |a_{11}|p\Big(\frac{\Delta}{a_{11}}y, x\Big) = |a_{11}| \cdot \Big|\frac{\Delta}{a_{11}}\Big| p(y,x)\\
&= |\Delta| p(x,y) = |\det A| p(x,y)
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. $\square$

Од дефиницијата за 2-полунорма и од лема 3 следува дека за секоја 2-полунорма важи:

($P1$) ако x, y е линеарно зависно множество во векторскиот простор X, тогаш $p(x,y) = 0$,

($P2$) $p\big(A(x,y)^T\big) = |\det A| p(x,y)$, за секоја $A \in M_2(\Phi)$, и за секои $x, y \in X$ и

($P3$) $p(x + x', y) \leq p(x,y) + p(x', y)$, за секои $x, x', y \in X$.

Важи и обратното тврдење, т.е. дека секоја функција која ги задоволува условите ($P1$)-($P3$) е 2-полунорма. Навистина:

1. Условот ($P1$) е еднаков со условот (i) од дефиницијата.
2. Нека $x, y \in X$ се произволно зададени. Тогаш користејќи го условот ($P2$) добиваме

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= p\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(x,y)^T\right) = \left(\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) p(y,x)\\
&= |-1| p(y,x) = p(y,x).
\end{aligned}$$

3. Нека $\alpha \in \Phi$ и $x, y \in X$ се произволно зададени. Тогаш

$$p(\alpha x, y) = p\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(x,y)^T\right) = \left(\det \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) p(x,y) = |\alpha| p(x,y).$$

4. Условите (iv) и ($P3$) се исти.

Од претходно изнесеното следува точноста на следната теорема.

Теорема 1. Условите (i)-(iv) од дефиницијата за 2-полунорма и условите $(P1)$-$(P3)$ се еквивалентни. $\square$

Од теорема 1 непосредно следува дека дефиницијата за 2-полунорма е во целост аналогна со дефиницијата на полунорма, со тоа што улогата на реален број кај полунормата ја има квадратната матрица од втор ред со нејзината детерминанта.

2. Некои класи подмножества од X^2

Нека p е 2-полунорма и да го разгледаме множеството

$$B = \big\{(x,y)\colon p(x,y) \le 1\big\}.$$

Од дефиницијата на множеството B, дефиницијата на 2-полунорма и својствата на матричното сметање непосредно следува точноста на следните тврдења.

1. За секои $(x,y)\in X^2$ постои матрица $A\in M_2(\Phi)$ така што $\det A>0$ и $A(x,y)^T \in B$.
2. За секоја $A \in M_2(\Phi)$ со $|\det A| \le 1$, $AB^T \subset B$.
3. Ако $A \in M_2(\Phi)$ и $\det A = 1$, тогаш $AB^T = B$.
4. Ако $(x,y),(x',y) \in B$ и $t \in [0,1]$, тогаш $\big(tx + (1-t)x', y\big) \in B$.

Претходно изнесеното е непосреден мотив за следните неколку дефиниции.

Дефиниција 1. За подмножеството W од $X \times X$ велиме дека е 2-инваријантно ако $AW^T = W$ за секоја матрица $A \in M_2(\Phi)$ со $\det A = 1$.

Дефиниција 2. За подмножеството W од $X\times X$ велиме дека е 2-урамнотежено ако за секоја $A \in M_2(\Phi)$ со $|\det A| \le 1$, $AW^T \subseteq W$.

Дефиниција 3. За подмножеството W од $X\times X$ велиме дека е 2-конвексно ако $(x,y),(x',y)\in W$ и $t\in[0,1]$, тогаш $\big(tx+(1-t)x',y\big)\in W$.

Дефиниција 4. За подмножеството W од $X \times X$ велиме дека е 2-апсорбирачко ако за секои $x,y \in X$ постои $A_{x,y} \in M_2(\Phi)$, со $\det A_{x,y} > 0$, така што $(x,y) \in A_{x,y}W^T$, т.е. $A_{x,y}^{-1}(x,y)^T \in W$.

Во натамошните разгледувања од интерес е да се разгледува множеството Δ_2, кое се состои од сите парови (x,y) за кои множеството е $\{x,y\}$ линеарно зависно множество. Јасно е дека множеството Δ_2 е 2-инваријантно, 2-урамнотежено, 2-апсорбирачко и 2-конвексно.

Забелешка. Во натамошниот дел ќе ги користиме очигледното својство

$$AW^T \subset W \Leftrightarrow W \subset A^{-1}W^T,$$

каде $A \in M_2(\Phi)$, $\det A \neq 0$.

За воведените класи подмножества ќе разгледаме некои својства.

Лема 4. Пресек на произволна фамилија 2-конвексни множества е 2-конвексно множество.

Доказ. Нека $W_\gamma, \gamma \in \Gamma$ е произволна фамилија од 2-конвексни подмножества од множеството $X \times X$. Нека $(x,y)(x',y) \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} W_\gamma$ и $t \in [0,1]$ се произволно зададени. Тогаш $(x,y),(x',y) \in W_\gamma$, за секое $\gamma\in\Gamma$ и од 2-конвексноста на $W_\gamma, \gamma\in\Gamma$ добиваме $\big(tx+(1-t)x', y\big)\in W_\gamma$, за секое $\gamma \in \Gamma$. Според тоа

$$\big(tx + (1-t)x', y\big) \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} W_\gamma\,.$$

Значи, $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} W_\gamma$ е 2-конвексно множество. □

Лема 5. Пресек на произволна фамилија 2-урамнотежени множества е 2-урамнотежено множество.

Доказ. Нека $S_\alpha, \alpha \in A$ е фамилија од 2-урамнотежени множества. Нека $S = \bigcap\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ и $A \in M_2(\Phi)$ е произволно зададена со $|\det A| \leq 1$. Тогаш $AS_\alpha^T \subseteq S_\alpha$, $\forall\,\alpha \in A$. Од последната инклузија добиваме:

$$AS = A\left(\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} AS_\alpha^T \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha = S,$$

т.е. $AS^T \subseteq S$. Од произволноста на $A \in M_2(\Phi)$, со $|\det A| \leq 1$, добиваме дека S е 2-урамнотежено. □

Лема 6. Пресек на произволна фамилија од 2-инваријантни множества е 2-инваријантно множество.

Доказ. Нека I_β, $\beta \in B$ е фамилија од 2-инваријантни множества и $I = \bigcap\limits_{\beta\in B} I_\beta$. За произволна $A \in M_2(\Phi)$ со $\det A = 1$ имаме $AI_\beta^T = I_\beta^T$. Според тоа

$$AI^T = A\left(\bigcap_{\beta\in B} I_\beta\right)^T = \bigcap_{\beta\in B} AI_\beta^T = \bigcap_{\beta\in B} I_\beta = I\,.$$

Од произволноста на $A \in M_2(\Phi)$ со $\det A = 1$, добиваме дека I е 2-инваријантно подмножество од $X \times X$. $\square$

Лема 7. Ако W е 2-урамнотежено множество, тогаш W е 2-инваријантно.

Доказ. Навистина, нека W е 2-урамнотежено множество и $A \in M_2(\Phi)$ со $\det A = 1$. Тогаш $AW^T \subseteq W$. Бидејќи $\det A = 1$, постои $A^{-1} \in M_2(\Phi)$ и $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$. Според тоа

$$A^{-1}W^T \subseteq W$$

од каде што добиваме:

$$A(A^{-1}W^T) \subseteq AW^T.$$

т.е. $W \subseteq AW^T$. Конечно, $AW^T = W$, т.е. W е 2-инваријантно подмножество од $X \times X$.

Лема 8. Ако $W \subset X^2$ е 2-апсорбирачко и 2-инваријантно, тогаш $\Delta_2 \subseteq W$. $\square$

Доказ. Нека W е 2-апсорбирачко и 2-инваријантно подмножество од $X \times X$. За произволен елемент $(x, y) \in \Delta_2$, постои скалар $\alpha \in \mathbf{R}$ таков што $x = \alpha y$ или постои скалар $\beta \in \mathbf{R}$, таков што $y = \beta x$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x = \alpha y$ за некој скалар α.

Множеството W е 2-апсорбирачко множество, постои матрица $B \in M_2(\mathbf{R})$ таква што $\det B > 0$ и $B^{-1}(0, y)^T \in W$. Ако воведеме ознака $C = B^{-1}$, тогаш $C(0, y)^T \in W$. Матрицата $\frac{1}{\sqrt{\det B}} C^{-1}$, бидејќи $C^{-1} = B$ има особина

$$\det\left(\frac{1}{\sqrt{\det B}} C^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\det B}}\right)^2 \det C^{-1} = \frac{1}{\det B} \det B = 1\,.$$

Од 2-инваријантноста на W, добиваме дека

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\det B}} C^{-1}\right)\left(C(0, y)^T\right)^T \in W, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{\det B}} CC^{-1}\right)(0, y)^T \in W.$$

Значи,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\det B}} E\right)(0, y)^T \in W, \quad \text{т.е.} \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{\det B}} y\right) \in W.$$

Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\det B}} & \alpha\sqrt{\det B} \\ 0 & \sqrt{\det B} \end{bmatrix}$$

е матрица за која

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\det B}} & \alpha\sqrt{\det B} \\ 0 & \sqrt{\det B} \end{vmatrix} = 1.$$

Според 2-инваријантноста на множеството W, добиваме дека

$$A\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{\det B}}y\right)^T \in W,$$

т.е. $(x,y) = (\alpha y, y) \in W$.

Тврдењето на лемата се добива од произволноста на $(x,y) \in \Delta_2$. $\square$

Забелешка. Од последното својство и лемата 7 се гледа дека секое 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество го содржи множеството Δ_2.

3. Една карактеризација на 2-полунорма

Нека W е 2-апсорбирачко множество. За произволен $(x,y)\in X^2$ го формираме множеството

$$H_W(x,y) = \{A/\det A > 0, A^{-1}(x,y)^T \in W\}.$$

Пресликувањето $\mu_W\colon X^2 \to R$ определено со

$$\mu_W(x,y) = \inf\{\det A \mid A \in H_W(x,y)\} \tag{1}$$

го нарекуваме 2-функционал.

Доказот дека 2-функционалот (1) по 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество е 2-полунорма ќе го спроведеме во неколку последователни тврдења. Претходно ќе го воведеме помошното множество

$$M_W(x,y) = \big\{\det A/A \in H_W(x,y)\big\} \tag{2}$$

Лема 9. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш множеството $M_U(x,y)$ е полуправа со лев крај $\mu_U(x,y)$.

Доказ. Нека $t \in M_U(x,y)$ е произволно зададен елемент. Според дефинцијата на множеството $M_U(x,y)$ постои матрица

$A \in M_2(\Phi)$ и $A \in H_U(x,y)$, таква што $\det A = t$ и $A^{-1}(x,y)^T \in U$. Бидејќи $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{t}$, заради 2-инваријантноста на U, добиваме дека $\left(\frac{1}{t}x, y\right) \in U$. Од тоа што U е 2-апсорбирачко и 2-инваријантно, според лема 8, имаме $\Delta_2 \subseteq U$, па според тоа $(0,y) \in U$. Нека $s > t$ е произволно зададен скалар. Тогаш за $\alpha = \frac{t}{s}$ и $\beta = 1 - \frac{t}{s}$ од 2-конвексноста на U, добиваме дека

$$\left(\frac{t}{s}\frac{1}{t}x + \left(1 - \frac{t}{s}\right)o, y\right) \in U,$$

т.е. $\left(\frac{1}{s}x, y\right) \in U$. Матрицата $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ е матрица со $\det B = \frac{1}{s}$, која има инверзна матрица $C = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $C^{-1}(x,y)^T = B(x,y)^T \in U$. Според тоа $s \in M_W(x,y)$.

Конечно, од произволноста на t и s, добиваме дека $M_U(x,y)$ е полуправа со лев крај $\mu_U(x,y) = \inf M_U(x,y)$. □

Лема 10. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш функционалот $\mu_U(x,y)$ е субадитивен по секоја од променливите x и y, т.е.

$$\mu_U(x_1 + x_2, y) \leq \mu_U(x_1, y) + \mu_U(x_2, y), \tag{1}$$

$$\mu_U(x, y_1 + y_2) \leq \mu_U(x, y_1) + \mu_U(x, y_2), \tag{2}$$

за секои $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$.

Доказ. Доволно е да го докажеме неравенството (1). Нека $x_1, x_2, y \in X$ се произволно зададени. Избираме два произволни скалари s и t за кои $s > \mu_U(x_1, y)$ и $t > \mu_U(x_2, y)$. Од дефинцијата на 2-функционалот μ_U, за $t \in M_U(x_1, y)$ и $s \in M_U(x_2, y)$, во множествата $H_U(x_1, y)$ и $H_U(x_2, y)$, постојат матрици A и B соодветно, така што $\det A = s$ и $\det B = t$ и

$$A^{-1}(x_1, y)^T \in U,\ B^{-1}(x_2, y)^T \in U,$$

Секое 2-урамнотежено множество е 2-инваријантно, па од равенствата $\det A^{-1} = \frac{1}{s}$, $\det B^{-1} = \frac{1}{t}$ добиваме

$$\left(\frac{1}{s}x_1, y\right) \in U \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{t}x_2, y\right) \in U.$$

Множеството U е 2-конвексно, и за скаларот $u = s + t > 0$, и за скаларите $\alpha = \frac{s}{u}$ и $\beta = \frac{t}{u}$, заради равенството

$$\alpha + \beta = \frac{s}{u} + \frac{t}{u} = \frac{s+t}{u} = \frac{u}{u} = 1,$$

добиваме

$$\Big(\frac{1}{u}(x_1+x_2), y\Big) = \Big(\frac{1}{u}x_1 + \frac{1}{u}x_2, y\Big) = \Big(\frac{s}{u}\Big(\frac{1}{s}x_1\Big) + \frac{t}{u}\Big(\frac{1}{t}x_2\Big), y\Big)$$
$$= \Big(\alpha\Big(\frac{1}{s}x_1\Big) + \beta\Big(\frac{1}{t}x_2\Big), y\Big) \in U.$$

Според тоа, за матрицата $C = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, за која $\det C = u$ имаме $C^{-1}(x_1+x_2,y)^T \in U$. Значи $u \in M_U(x_1+x_2,y)$. Според дефинцијата на функционалот μ_U добиваме дека

$$\mu_U(x_1+x_2,y) \le u = s+t\,.$$

Од произволноста на s и t добиваме дека

$$\mu_U(x_1+x_2,y) \le \mu_U(x_1,y) + \mu_U(x_2,y).$$

Доказот за субадитивност по втората променлива е потполно аналоген. $\square$

Лема 11. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш за произволен скалар $t \ge 0$ и за кои било $x, y \in X$ е исполнето равенството

$$\mu_U(tx,y) = t\mu_U(x,y) \quad \text{и} \quad \mu_U(x,ty) = t\mu_U(x,y).$$

Доказ. Нека $t > 0$ и $(x,y) \in X^2$ се произволно зададени елементи. За $s \in M_U(tx,y)$, $s > 0$, постои матрица A со $\det A = s > 0$ за која $A^{-1}(tx,y)^T \in U$. Од 2-инваријантноста на U и $\det A^{-1} = \frac{1}{s}$, имаме $\left(\frac{t}{s}x, y\right) \in U$. Бидејќи $t, s > 0$, за матрицата $B = \begin{bmatrix} \frac{s}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ со $\det B = \frac{s}{t}$, $B^{-1}(x,y)^T \in U$. Според тоа $\frac{s}{t} \in M_U(x,y)$, од каде што добиваме дека $\mu_U(x,y) \le \frac{s}{t}$, т.е. $t\mu_U(x,y) \le s$. Од произволноста на $s \in M_U(tx,y)$, имаме

$$t\mu_U(x,y) \le \mu_U(tx,y). \tag{$*$}$$

Нека $s \in M_U(x,y)$ е произволно зададен скалар. Тогаш постои матрица $A \in H_U(x,y)$ така што $\det A = s$ и $A^{-1}(x,y) \in U$. Бидејќи $\det A^{-1} = \frac{1}{s}$, од 2-инваријантноста на U, имаме $\left(\frac{1}{s}x, y\right) \in U$. Според тоа $\left(\frac{1}{st}(tx), y\right) \in U$. За матрицата

$$C = \begin{bmatrix} ts & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det C = ts > 0 \quad \text{и} \quad C^{-1}(tx,y) \in U,$$

т.е.

$$\left(\frac{1}{ts}(tx), y\right) = \left(\frac{1}{s}x, y\right) \in U.$$

Според тоа $ts \in M_U(tx, y)$, од каде добиваме дека

$$\mu_U(tx, y) \le ts$$

(според дефинцијата за μ_U), и од произволноста на s, добиваме дека

$$\mu_U(tx, y) \le t\mu_U(x, y). \tag{$**$}$$

Конечно, од $(*)$ и $(**)$ добиваме дека

$$\mu_U(tx, y) = t\mu_U(x, y).$$

Специјално ќе го разгледаме случајот $t = 0$. За $t = 0$, множеството $(tx, y) = (0x, y) = (o, y)$ е линеарно зависно. Според тоа за која било $A \in M_2(\Phi)$ со $\det A = s > 0$, имаме $A^{-1}(o, y)$ е линеарно зависно множество, па според тоа припаѓа на U, од каде што добиваме дека $s \in M_U(x, y)$. Според тоа $M_U(x, y) = (0, +\infty)$ и

$$\mu_U(tx, y) = \mu_U(o, y) = 0 = 0\mu_U(x, y) = t\mu_U(x, y).$$

Значи, и во овој случај е исполнето равенството. $\square$

Лема 12. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш за произволен скалар $\alpha \in \Phi$ со $|\alpha| = 1$ и за кои било $x, y \in X$ е исполнето равенството

$$\mu_U(\alpha x, y) = |\alpha|\mu_U(x, y) = \mu_U(x, y).$$

Доказ. Ќе ги разгледаме матриците

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

каде α е скалар за кој што $|\alpha| = 1$. Јасно е дека $B^{-1} = C$ и $C^{-1} = B$ и $\det B = \alpha$ и $\det C = \overline{\alpha}$.

Нека $t \in M_U(x, y)$ е произволно зададен скалар. Од дефиницијата на $M_U(x, y)$ имаме дека постои $A \in H_U(x, y)$ со $\det A = t$ и $A^{-1}(x, y)^T \in U$. Според тоа

$$\begin{aligned} &A^{-1}(\alpha\,\overline{\alpha}\,x, y)^T \in U, \\ &A^{-1}\big(C(\alpha x, y)^T\big)^T \in U, \\ &(A^{-1}C)(\alpha x, y)^T \in U. \end{aligned}$$

Бидејќи U е 2-урамнотежено множество, и B е матрица за која $|\det B| = 1$ имаме

$$B\big[(A^{-1}C)(\alpha x, y)^T\big]^T \in U, \quad \text{односно} \quad (BA^{-1}C)(\alpha x, y)^T \in U.$$

Според тоа

$$(C^{-1}AB^{-1})^{-1}(\alpha x, y)^T \in U.$$

Матрицата $D = C^{-1}AB^{-1} = BAC$ е матрица за која

$$\det(BAC) = (\det B)(\det A)(\det C) = \alpha t\,\overline{\alpha} = t,$$

односно $D \in H_U(\alpha x, y)$ и затоа $t \in M_U(\alpha x, y)$.

Од претходното е јасно дека е исполнета инклузијата

$$M_U(x, y) \subseteq M_U(\alpha x, y). \tag{1}$$

Обратно, нека претпоставиме дека $s \in M_U(\alpha x, y)$ е произволно зададен број. Значи, постои $P \in H_U(\alpha x, y)$, така што $\det P = s$ и

$$P^{-1}(\alpha x, y) \in U,$$

односно

$$P^{-1}\big[B(x, y)^T\big]^T \in U, \quad (P^{-1}B)(x, y)^T \in U.$$

Матрицата C е матрица за која $|\det C| = |\overline{\alpha}| = 1$, па затоа $C\big[(P^{-1}B)(x, y)^T\big]^T \in U$

$$(CP^{-1}B)(x, y)^T \in U,$$

т.е. $(B^{-1}PC^{-1})^{-1}(x, y)^T \in U$. Бидејќи $B^{-1}PC^{-1} = CPB$ и

$$\det(CPB) = (\det C)(\det P)(\det B) = \overline{\alpha}\,s\alpha = s,$$

добиваме $CPB \in H_U(x, y)$ и $\det(CPB) = s > 0$. Значи $s \in M_U(x, y)$. Со тоа докажавме дека

$$M_U(\alpha x, y) \subseteq M_U(x, y)\,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) се добива равенството

$$M_U(\alpha x, y) = M_U(x, y),$$

што е доволно за точност на тврдењето на лемата. $\square$

Лема 13. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш за произволен сцалар $\alpha \in \Phi$ и за кои било $x, y \in X$ е исполнето равенството

$$\mu_U(\alpha x, y) = |\alpha|\mu_U(x, y) = \mu_U(x, y)$$

Доказ. Нека $\alpha \in \Phi$ е произволно зададен скалар и $x, y \in X$ се зададени вектори. Тогаш со примена на претходните две леми имаме

$$\mu_U(\alpha x, y) = \mu_U\left(|\alpha|\frac{\alpha}{|\alpha|}x, y\right) = |\alpha|\mu_U\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x, y\right) = |\alpha|\mu_U(x, y), \quad \square$$

Лема 14. Ако $U \subseteq X^2$ е 2-конвексно, 2-урамнотежено и 2-апсорбирачко множество, тогаш за $x, y \in X$ е исполнето равенството

$$\mu_U(x, y) = \mu_U(y, x).$$

Доказ. Матрицата $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ е матрица за која што $\det B = -1$ и $B^{-1} = B$. Значи, B е матрица за која $|\det B| = 1$.

За $t \in M_U(x, y)$ постои $A \in H_U(x, y)$ со $\det A = t$ и $A^{-1}(x, y)^T \in U$. Според тоа

$$A^{-1}\big[B(y, x)^T\big]^T \in U,$$

и бидејќи B е матрица со $|\det B| = 1$, од 2-урамнотеженоста на U, добиваме

$$B\big[A^{-1}[B(y, x)^T]^T\big]^T \in U.$$

Значи,

$$(BA^{-1}B)(y, x)^T \in U, \quad \text{односно} \quad (B^{-1}AB^{-1})^{-1}(y, x)^T \in U.$$

Матрицата $B^{-1}AB^{-1}$ има особина

$$\det(B^{-1}AB^{-1}) = (\det B^{-1})(\det A)(\det B^{-1}) = t.$$

Според тоа $B^{-1}AB^{-1} \in H_U(y, x)$, од каде што добиваме $t \in M_U(y, x)$. Значи,

$$M_U(x, y) \subseteq M_U(y, x). \tag{1}$$

Обратно, нека претпоставиме дека $s \in M_U(y, x)$. Значи, постои матрица $C \in H_U(y, x)$ со $\det C = s$, и

$$C^{-1}(y, x)^T \in U.$$

За матрицата B имаме

$$C^{-1}\left[B(x,y)^T\right]^T \in U, \quad \text{односно} \quad (C^{-1}B)(x,y)^T \in U.$$

Бидејќи B е матрица со $|\det B| = |-1| = 1$ и U е 2-урамнотежено множество, добиваме

$$B\left[(C^{-1}B)(x,y)^T\right]^T \in U, \quad \text{односно} \quad \left[B(C^{-1}B)\right](x,y)^T \in U,$$

т.е.

$$[B^{-1}CB^{-1}]^{-1}(x,y)^T \in U.$$

Матрицата $B^{-1}CB^{-1}$ е матрица со

$$\det(B^{-1}CB^{-1}) = \det(B^{-1})(\det C)(\det B^{-1}) = (-1)s(-1) = s > 0.$$

Значи, $B^{-1}CB^{-1} \in H_U(x,y)$, односно $s \in M_U(x,y)$.

Конечно,

$$M_U(y,x) \subseteq M_U(x,y).$$

Од (1) и (2) добиваме

$$M_U(y,x) = M_U(x,y),$$

од каде следува тврдењето на теоремата. $\square$

Од доказот на теоремата 2, јасно е дека полунормите се 2-функционали по 2-конвексни, 2-урамнотежени и 2-апсорбирачки множества.

Очигледно е дека карактеризацијата на 2-полунормите е аналогна со карактеризацијата на полунормите кои се функционали на Минковски.

Литература

[1] Gähler S.: *Lineare 2-normierte Raume,* Math. Nach. 28(1965)

[2] Malceski, A.; Malceski, R.: *Забелешка за n-полунормиран простор,* Зборник на трудови од II конгрес на СММ Охрид 2000

[3] Malceski, A.; Malceski, R.: *n-Seminormed spaces,* Годишен зборник на Институтот за математика, Том 38 (1997)

[4] Malceski, A.; Malceski, R.: $L^1(\mu$ *AS A n-NORMED SPACE,* Годишен зборник на Институтот за математика, Том 38 (1997)

[5] Malceski, A.: l^∞ *AS A n-NORMED SPACE*, Математички билтен, Том 21 (1997)

[6] Малчески, А.: *Забелешка за дефиницијата на 2-нормиран простор,* Математички билтен, Том 26 (2002)

CHARACTERIZATION OF 2-SEMI NORMS

Aleksa Malcheski

S u m m a r y

A characterization of 2-semi norm, as a class of functional of type Minkovski is given.

Faculty of Mechanical Engineering
Univ. "St. Cyril and Methodius"
1000 Skopje
Macedonia

e-mail: aleksa@mf.edu.mk