Математички Билтен ISSN 0351–336X
29 (LV)
2005 (99–104)
Скопје, Македонија

ПРАВОАГОЛНИ ПОЛУГРУПИ

Бранко Л. Трпеновски

Една полугрупа S се нарекува *лента* ако сите нејзини елементи се *идемпотенти*, т.е. $x^2 = x$ за секој $x \in S$.

Полугрупата S се нарекува *антикомутативна* ако го поседува следново својство:

$$xy = yx \Rightarrow x = y, \quad x, y \in S.$$

Секоја антикомутативна полугрупа е лента. Антикомутативните полугрупи уште се нарекуваат *правоаголни ленти*.

Овде ќе разгледаме некои можни обопштувања на правоаголните ленти, при што како појдовна ќе ни послужи следнава еквивалентна дефиниција на тие ленти [8]):

Лема 1. *Полугрупата S е правоаголна лента ако и само ако во S се задоволени следниве својства:*

$$(1) \qquad (\forall x \in S) \qquad x^2 = x,$$

$$(2) \qquad (\forall x, y, z \in S) \qquad xyz = xz. \qquad \square$$

Натаму, претпоставката дека сите елементи на дадената полугрупа да бидат идемпотентни ќе биде испуштена, а ќе го обопштиме идентитетот (2). Како што ќе покажеме подоцна, полугрупата ќе поседува идемпотенти, но до заклучокот дека сите нејзини елементи ќе бидат идемпотенти, ќе нѐ доведе уште некоја друга дополнителна претпоставка. Најавеното обопштување на идентитетот (2) ќе го воведеме со следнава

Дефиниција. Полугрупата S ја нарекуваме *правоаголна полугрупа* ако постојат $k, m \in \mathbf{N}$, $k < m$, $m > 2$, такви што да биде задоволено следново својство:

$$(3) \qquad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_m, y \in S) \quad x_1 \ldots x_k y x_{k+1} \ldots x_m = x_1 x_2 \ldots x_m .$$

Насекаде натаму S ќе биде правоаголна полугрупа. Нека $x \in S$ и $n \in \mathbf{N}$; ако $n \geq m$ тогаш според (3) добиваме дека

$$x^n = x^k x^{n-m} x^{m-k} = x^k x^{m-k} = x^m ,$$

$$(4) \qquad x^n = x^m \quad \text{за} \quad n \geq m .$$

За $n = 2m$ од (4) следува дека $(x^m)^2 = x^m$, па x^m е идемпотент. Нека s е најмалиот природен број за кој x^s е идемпотент (овде $s \leq m$). Според аксиомата на Архимед постои $r \in \mathbf{N}$ таков што $rs > m$, а тогаш, со оглед на (4),

$$x^s = x^{rs} = x^m ,$$

а потоа за кој било $l > s$, ако $l = ps + t$, добиваме дека,

$$x^l = x^{ps} \cdot x^t = x^s \cdot x^t = x^m \cdot x^t = x^k x^t x^{m-k} = x^m ,$$

така што, за секој $l > s$ е

$$x^l = x^m = x^s .$$

Тоа значи дека периодичниот дел од цикличната потполугрупа $\langle x \rangle$ од S е едноелементна (единична) подгрупа од S, т.е.

$$(5) \qquad \langle x \rangle = \{x, x^2, \ldots, x^{s-1}\} \cup \{x^s = e_x\} ,$$

каде што со e_x го означуваме идемпотентот што му соодветствува на x.

Да го означиме со E множеството од сите идемпотенти од S. Од изнесеното следува дека $E \neq \emptyset$ (се претпоставува дека и $S \neq \emptyset$). Нека $e \in E$ и $x \in S$; поради

$$exe = e^k x e^{m-k} = e^k e^{m-k} = e^m = e\,,$$

имаме дека

$$(ex)^2 = exex = ex\,, \quad (xe)^2 = xexe = xe\,,$$

така што $ex, xe \in E$. Тоа значи дека E е идеал (па според тоа и потполугрупа) во S.

Ако $e, f, g \in E$, имаме дека

$$efg = e^k f g^{m-k} = e^k g^{m-k} = eg\,,$$

па E е правоаголна лента.

Да го сумираме напред изнесеното во следнава

Лема 2. *Секоја правоаголна полугрупа S е периодична при што, за секој $x \in S$, периодичниот дел од цикличната потполугрупа $< x >$ е единична подгрупа од $< x >$ (и од S). Множеството E од сите идемпотенти од S е правоаголна лента и е идеал во S.* □

Да разгледаме некои можни обопштувања на идемпотентото својство (1), претпоставувајќе и натаму дека S е правоаголна полугрупа. Најнапред ќе го разгледаме следново својство (наречено *обопштена идемпотентност):*

$$(6) \qquad (\exists n \in \mathbf{N})(\forall x, y \in S)(x^n = y^n \Rightarrow x = y)\,.$$

Ако S е правоаголна лента, тогаш (6) е точно; исто така во правоаголна лента точно е и својството (3).

Да го претпоставиме обратното: S да биде правоаголна полугрупа во која е точно (6). Ако $n \geq m$, тоагаш според (4) за секој $x \in S$ имаме дека $x^n = x^m$ каде што x^m е идемпотент (да ставиме $x^m = e_x$). Сега имаме дека $x^n = e_x = e_x^n$ од каде, според (6) следува дека $x = e_x$, па S ќе биде лента. Но, како и при доказот на Лемата 2, како последица од идемпотентноста и (3) се добива дека S е правоаголна лента.

Да претпоставиме дека $1 < n < m$ (за $n = 1$ (6) е тривијално). Постои $r = \mathbf{N}$ такво што $n^r > m$. Да претпоставиме дека $xy = yx$ (од оваа претпоставка следува дека $x^p y^q = y^q x^p$ за секои $p, q \in N$); со повеќекратна примена на последниов идентитет и (3) добиваме:

$$x^{n^r} = x^k x^{n^r - m} \cdot x^{m-k} = x^m = x^k y x^{m-k} = y x^{k-1} x x^{m-k} =$$

$$= y x^{k-1} y x^{m-k} = \cdots = y^k x x^{m-k} = \cdots = y^k x y^{m-k} =$$

$$= y^k \cdot y^{n^r - m} y^{m-k} = y^{n^r}.$$

Значи,

$$x^{n^r} = y^{n^r}.$$

Од последново равенство со повеќекратна примена на (6) добиваме, по ред:

$$x^{n^r} = y^{n^r} \Rightarrow x^{n^{r-1}} = y^{n^{r-1}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow x = y\,,$$

па добиваме дека $xy = yx \Rightarrow x = y$ што значи дека S е правоаголна лента. Така ја докажавме следнава

Теорема 1. *Правоаголната полуправа S е правоаголна лента ако и само ако во S е точно својството* (6). □

RECTANGULAR SEMIGROUPS

Branko L. Trpenovski

Summary

A semigroup S is called a *band* iff all their elements are idempotents, i.e. $x^2 = x$ for any $x \in S$. A semigroup S is said to be *anti-commutative* iff it satisfies the following condition

$$xy = yx \Rightarrow x = y, \quad \text{for all} \quad x, y \in S\,.$$

Every anti-commutative semigroup is a band. The anti-commutative semigroups are also called *rectangular bands.*

We will consider here some possible generalizations of the rectangular bands. As a starting point we will use the following (well-known) equivalent definition of these bands):

Lemma 1. *A semigroup S is a rectangular band if and only if S satisfies the following conditions:*

$$(1) \qquad (\forall x \in S) \qquad x^2 = x,$$

$$(2) \qquad (\forall x, y, z \in S) \quad xyz = xz\,.$$

□

Further on, the assumption that all elements of the given semigroup are idempotents will be abandon, and the identity (2) will be generalized. As we will see later, the semigroup will have idempotents, but the conclusion that all their elements are idempotents will follow by an additional supposition. The announced generalization of the identity (2) will be introduced by the following

Definition. A semigroup S is called a *rectangular semigroup* iff there are $k, m \in \mathbf{N}$, $k < m$, $m > 2$, such that the following condition is satisfied:

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_m, y \in S)\; x_1 \ldots x_k y x_{k+1} \ldots x_m = x_1 x_2 \ldots x_m . \tag{3}$$

Below it is assumed that S is a rectangular semigropup.

Let $x \in S$ and $n \in \mathbf{N}$. If $n \geq m$, then by (3) one obtains that:

$$x^n = x^m \quad \text{for} \quad n \geq m , \tag{4}$$

and that the periodic part of the cyclic subsemigroup $\langle x \rangle$ of S is a one-element subgroup of S, i.e.

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, \ldots, x^{s-1}\} \cup \{x^s = e_x\} , \tag{5}$$

where e_x denotes the idempotent which corresponds to x.

Denote by E the set of all idempotents of S. It is easy to see that E is an ideal (thus a subsemigroup) in S and a rectangular band. We will summarize all this in the following

Lemma 2. Any rectangular semigroup S is periodic, such that for every $x \in S$, the periodic part of the cyclic subsemigroup $\langle x \rangle$ is a unit subgroup of $\langle x \rangle$ (and of S). The set E of all idempotents of S is a rectangular band and an ideal in S. □

Supposing still that S a rectangular semigroup, consider the following condition

$$(\exists n \in \mathbf{N})(\forall x, y \in S)(x^n = y^n \Rightarrow x = y) . \tag{6}$$

If S is a rectangular band, then the condition (6) and the condition (3) too, are satisfied. Conversely, if S is a rectangular semigroup with (6), then S is a rectangular band. Thus we have the following

Theorem 1. *A rectangular semigroup S is a rectangular band if and only if the condition* (6) *is satisfied in S.* □