Математички Билтен
28 (LIV)
2004 (91–100)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТ НА РЕШЕНИЈАТА НА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД I РЕД

Јорданка Митевска*, Марија Кујумџиева-Николоска** и
Драган Димитровски*

Апстракт

Во трудов даваме услови при кои нехомогената линеарна диференцијална равенка од I ред (1) има квазипериодични решенија (2).

Вовед

Решението $y(x)$ на линеарна диференцијална равенка од I ред

$$y' + f(x)y + g(x) = 0 \tag{1}$$

е периодично ако постои константа ω за која во дефиниционото подрачје на f, g и y важи

$$y(x+\omega) = y(x), \quad x \in I \subseteq D_f \cap D_g \cap D_y$$

Ако повторувањето е нерамномерно и се остварува по некој закон $\omega = \omega(x)$, при што важи

$$y\big(x + \omega(x)\big) = \lambda y(x) \tag{2}$$

решението е квазипериодична функција (КПФ) со квазипериод (КП) $\omega(x)$ и коефициент на деформација (КД) λ. За $|\omega(x)| \neq 0$,

$\lambda > 0$ и $\lambda \neq 1$, коефициентот λ го регулира опаѓањето и растењето на функцијата y.

Овде бараме да најдеме услови при кои равенката (1) има квазипериодични решенија. Ако кон равенките (1) и (2) ја додадеме и изводната равенка

$$y'\big(x+\omega)\big)\big(1+\omega'(x)\big) = \lambda y'(x)$$

тогаш трите непознати во овој проблем $y(x)$, $\omega(x)$ и коефициентот λ се определени со системот

$$\begin{cases} y' + f(x)y + g(x) = 0 \\ y\big(x+\omega(x)\big) = \lambda y(x) \\ y'\big(x+\omega(x)\big)\big(1+\omega'(x)\big) = \lambda y'(x) \end{cases} \tag{3}$$

Ако во првата равенка наместо аргументот x ставиме $x + \omega(x)$, добиваме

$$y'(x+\omega) + f(x+\omega)\cdot y(x+\omega) + g(x+\omega) = 0\,. \tag{4}$$

Ако од (4) и третата равенка на (3) го елиминираме изводот $y'\big(x+\omega(x)\big)$ добиваме равенка

$$\frac{\lambda\big(f(x)y+g(x)\big)}{1+\omega'} = f(x+\omega)\lambda y + g(x+\omega), \quad 1+\omega' \neq 0 \tag{5}$$

која ако ја групираме по $\omega(x)$ гласи

$$\big[f(x)y+g(x)\big] = (1+\omega')\cdot\Big[f(x+\omega)\cdot y + \frac{1}{\lambda}g(x+\omega)\Big], \quad \lambda \neq 0. \tag{6}$$

Изразот (6) претставува една функционално-диференцијална равенка по $\omega(x)$, т.е.

$$\Phi(x, y, \omega(x), \omega'(x), f(x), g(x), f(x+\omega), g\big(x+\omega)\big) = 0$$

која во општ случај е тешко решлива, иако решението на (1) може да се напише експлицитно со квадратури. Затоа за почеток може да разгледуваме само некои специјални случаи.

1. Нека коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ имаат својство:

$$f\big(x+\omega(x)\big) = f(x), \quad g\big(x+\omega(x)\big) = \lambda g(x) \tag{7}$$

Тогаш од (6) добиваме $1 = 1 + \omega'(x)$, т.е. $\omega'(x) = 0$, односно $\omega(x)$ =конст.$= \omega^*$.

Следува

Теорема 1. *Ако во диференцијалната равенка (1), $f(x)$ е периодична функција со период ω^*, а $g(x)$ е квазипериодична со коефициент на деформација λ и квазипериод ω^*, тогаш општото решение $y(x, C)$ на равенката (1) е квазипериодично со константен период ω^* и коефициент на деформација λ.*

2. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се квазипериодични функции такви што:

$$f(x+\omega) = \frac{\mu}{\lambda} f(x), \qquad g(x+\omega) = \mu g(x)$$

од (6) следува: ако $f(x) \cdot y + g(x) \neq 0$, т.е. $y \neq -\dfrac{g(x)}{f(x)}$, тогаш $1 + \omega' = \dfrac{\lambda}{\mu}$, од каде

$$\omega = \Big(\frac{\lambda}{\mu} - 1\Big)x + c_1. \tag{8}$$

Следува

Теорема 2. *Ако коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ се квазипериодични функции со коефициенти на деформација $\dfrac{\mu}{\lambda}$ и μ, соодветно, тогаш решението на (1) е квазипериодично со квазипериод (8) што е линеарна функција од x.*

3. Ако коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ во (1) се квазипериодични функции со коефициенти на деформација μ и ν, соодветно, и $\mu \neq \nu$, т.е.

$$f(x+\omega) = \mu f(x). \quad g(x+\omega) = \nu g(x), \quad \mu \neq 1, \quad \nu \neq 1, \quad \mu \neq \nu$$

тогаш од (6) имаме:

$$f(x)y + g(x) = (1+\omega') \cdot \Big[\mu f(x) \cdot y + \frac{\nu}{\lambda} g(x)\Big]$$

од каде со една квадратура по ω добиваме:

$$\omega(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu)f(x)y + \Big(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\Big)g(x)}{\mu f(x)y + \dfrac{\nu}{\lambda} g(x)} dx$$

и бидејќи општото решение на (1) е

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}\left[C - \int\limits_{x_0}^{x} g(t) e^{\int\limits_{t_0}^{t} f(u)du} dt\right],$$

имаме

$$\omega(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu)f(x)\left[e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(C - \int\limits_{x_0}^{x} g(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t} f(u)du} dt\right)\right] + \left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)g(x)}{\mu f(x)\left[e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(C - \int\limits_{x_0}^{x} g(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t} f(u)du} dt\right)\right] + \frac{\nu}{\lambda}g(x)} dx. \tag{9}$$

Следува

Теорема 3. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ се квазипериодични функции со коефициенти на деформација μ и ν, соодветно, и $\mu \neq \nu$,тогаш решението на (1) е квазипериодично со коефициент на деформација λ и квазипериод определен со (9).*

4. Ако $\omega' = 0$, т.е. $\omega(x)$ =конст.= ω^*, од (6) добиваме:

$$y = -\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{g(x+\omega^*) - \lambda g(x)}{f(x+\omega^*) - f(x)}; \quad \text{за} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{и} \quad f(x+\omega^*) \neq f(x)$$

Ако f и g се КПФ со КД μ и ν, соодветно, т.е. $f(x+\omega^*) = \mu f(x)$, $g(x+\omega^*) = \nu g(x)$, тогаш имаме:

$$y = -\frac{(\nu-\lambda)g(x)}{\lambda(\mu-1)f(x)}, \quad \text{за} \quad \mu \neq 1, \quad f(x) \neq 0. \tag{10}$$

Но (10) е решение на (1), па функцијата (10) и нејзиниот извод ја задоволуваат равенката (1), од каде по кусо пресметување добиваме дека функциите f и g ја задоволуваат релацијата

$$\frac{f'g - fg'}{gf^2} = \frac{\lambda\mu - \nu}{\lambda - \nu}, \quad \text{за} \quad g \neq 0, \quad f \neq 0, \quad \lambda \neq \nu. \tag{11}$$

Следува

Теорема 4. *Ако решението $y(x)$ на равенката (1) има константен КП $\omega = \omega^*$, со КД λ, и ако f и g се КПФ со ист период $\omega = \omega^*$ и КД μ и ν, соодветно, тогаш решението е од вид (10) а меѓу коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ важи релацијата (11).*

Специјално, ако $\frac{\lambda\mu - \nu}{\lambda - \nu} = 0$, т.е. $\lambda = \frac{\nu}{\mu}$ и $\lambda \neq \nu$, тогаш од (11) имаме: $f' \cdot g - f \cdot g' = 0$, од каде $f = Cg$, па решението на (1) е константа, т.е. $y = -\frac{1}{C}$.

5. Равенката (1) е квадратурно решлива, т.е. важи

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left[C - \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt\right]. \tag{12}$$

Од условот (2) добиваме:

$$e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \cdot e^{-\int_{x}^{x+\omega} f(t)dt}\left[C - \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt - \int_{x}^{x+\omega} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} du\right] =$$

$$= \lambda\, e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left[C - \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt\right]$$

од каде по кратење со $e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \neq 0$ и групирање по C го добиваме равенството

$$\left[e^{-\int_{x}^{x+\omega} f(t)dt} - \lambda\right] C = \left[e^{-\int_{x}^{x+\omega} f(t)dt} - \lambda\right] \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt - \int_{x}^{x+\omega} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt.$$

Ова равенство е исполнето за секое C ако важи:

$$e^{-\int_{x}^{x+\omega} f(t)dt} = \lambda, \tag{13}$$

и

$$\int_{x}^{x+\omega} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt = 0. \tag{14}$$

Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, т.е.

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Тогаш

$$\int_x^{x+\omega} f(t)dt = F(x+\omega) - F(x)$$

па од (13) следува

$$F\big(x+\omega(x)\big) = F(x) + \ln\frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{15}$$

Ако во (14) ставиме

$$h(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt} g(x),$$

тогаш

$$h(x) = e^{F(x)-F(x_0)} \cdot g(x)$$

т.е.

$$h(x) = C_1\, e^{F(x)} \cdot g(x), \qquad C_1 = e^{-F(x_0)}\,.$$

Ако $H(x)$ е примитивна функција за $e^{F(x)} \cdot g(x)$, т.е.

$$\int e^{F(x)}\, g(x)dx = H(x)$$

тогаш од (14) добиваме

$$H\big(x+\omega(x)\big) = H(x). \tag{16}$$

Од горното разгледување следува

Теорема 5. *Ако секое решение на* (1) *е КПФ со КД* λ *тогаш за примитивните функции* $F(x)$ *и* $H(x)$ *за функциите* $f(x)$ *и* $e^{F(x)}g(x)$, *соодветно, важат релациите* (15) *и* (16).

6. Со парцијална интеграција во условот (14), добиваме

$$e^{F(x+\omega)}G(x+\omega) - e^{F(x)}G(x) - \int_x^{x+\omega} e^{F(t)}G(t)f(t)dt = 0, \qquad G(x) = \int g(x)dx. \tag{17}$$

Заменувајќи го (15) во првиот член на (17) по кусо пресметување добиваме

$$e^{F(x)}[G(x+\omega) - \lambda G(x)] + \lambda \int_x^{x+\omega} e^{F(t)}G(t)f(t)dt = 0$$

или

$$\lambda \int_x^{x+\omega} e^{F(t)} G(t) f(t) dt = e^{F(x)} \big[\lambda G(x) - G(x+\omega)\big].$$

Специјално, ако

$$G(x+\omega) = \mu_1 G(x)$$

тогаш

$$\lambda \int_x^{x+\omega} e^{F(t)} G(t) f(t) dt = (\lambda - \mu_1) e^{F(x)} G(x)\,,$$

а при $\lambda = \mu_1$:

$$\int_x^{x+\omega} e^{F(t)} G(t) f(t) dt = 0\,.$$

Од горното разгледување следува

Теорема 6. *Ако решението на* (1) *и примитивната функција* $G(x)$ *за коефициентот* $g(x)$ *се КПФ со ист коефициент на деформација,* $\lambda = \mu_1$*, тогаш важат условите:*

$$\begin{cases} 1^\circ \quad F(x+\omega) = F(x) + \ln \dfrac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0 \\ 2^\circ \quad \displaystyle\int_x^{x+\omega} e^{F(t)} G(t) f(t) dt = 0\,. \end{cases}$$

7. Од посебно значење е теоремата за доволни услови за постоење на периодични решенија за равенката (1). За решението на равенката (1) да биде периодично потребно е во условот (2) да важи: $\omega(x)$ = конст.$= \omega^*$ и $\lambda = 1$. Но тогаш, бидејќи $\ln \dfrac{1}{\lambda} = 0$, од условот (14) добиваме $F(x+\omega^*) = F(x)$, т.е. треба и примитивната функција за $f(x)$ да е периодична со ист константен период ω^*. Но тогаш, според теоремата за средна вредност, имаме:

$$F(x+\omega^*) - F(x) = \int_x^{x+\omega^*} f(x) dx = f(\xi)\omega^* = 0, \quad x < \xi < x + \omega^*$$

па бидејќи $\omega^* \neq 0$ следува

$$f(\xi) = 0 \tag{18}$$

т.е. коефициентот $f(x)$ треба да има барем една нула во интервалот $(x, x+\omega^*)$.

Слично, од (15) и (16) следува

$$
\begin{aligned}
H(x+\omega^*) - H(x) &= \int_x^{x+\omega^*} g(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt = \int_x^{x+\omega^*} g(t)\, e^{F(t)} dt \\
&= \omega^* \cdot g(\xi_1) e^{F(\xi_1)} = 0, \qquad x < \xi_1 < x+\omega^* .
\end{aligned}
$$

Бидејќи е $\omega^* \neq 0$ и $e^{F(\xi_1)} \neq 0$, следува $g(\xi_1) = 0$, т.е. и коефициентот $g(x)$ има барем една нула во интервалот $(x, x+\omega^*)$. Од овде следува следната основна теорема на проблемот (3):

Теорема 7. *Доволни услови равенката* (1) *да има периодично решение со период* ω^* *се:*

i) *функцијата* $F(x) = \int f(x)dx$ *да е периодична со период* ω^**;*

ii) *функцијата* $G(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$ *да е периодична со период* ω^**;*

iii) *коефициентот* $f(x)$ *да има барем една нула во интервалот* $(x, x+\omega^*)$*;*

iv) *коефициентот* $g(x)$ *да има барем една нула во интервалот* $(x, x+\omega^*)$.

Пример 1. Во равенката

$$y' + (1+\cos x)y - \cos x = 0$$

коефициентите се периодични функции со период $\omega = 2\pi$, но не е исполнет условот i) во теоремата 7, т.е.

$$F(x) = \int (1+\cos)dx = x + \sin x$$

не е периодична функција, па равенката нема периодично решение. Навистина, општото решение на равенката е

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int(1+\cos x)dx}\left[C + \int e^{(1+\cos x)dx} \cos x\, dx\right] \\
&= e^{-x-\sin x}\left[C + \int e^{x+\cos x} \cos x\, dx\right]
\end{aligned}
$$

што не е периодична, но е квазипериодична функција.

Пример 2. Равенката на Бернули за проблемот на растење во математичката биологија,

$$y' = a(x)y + b(x)y^2$$

во еден специјален вид гласи

$$y' = y\sin x + y^2 \sin x \cos x\,.$$

Со смената

$$y = \frac{1}{z}, \quad y' = \frac{z'}{z^2},$$

ја добиваме линеарната равенка

$$z' + \sin x \cdot z + \sin x \cos x = 0 \tag{$*$}$$

чии коефициенти $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x \cos x$ се периодични функции, со заеднички основен период 2π и притоа $f(x)$ и $g(x)$ ги задоволуваат условите од Теорема 7. Имено,

i) $F(x) = \int f(x)dx = -\cos x$ е периодична со основен период 2π;

ii) $G(x) = \int g(x)\, e^{\int f(x)dx} dx = -e^{-\cos x}(1 + \cos x)$ е периодична со период 2π;

iii) $f(x) = 0$ за $x = \pi \in (0, 2\pi)$ и

iv) $g(x) = 0$ за $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$, при што $x_1, x_2 \in (0, 2\pi)$.

Значи, исполнети се условите од теоремата 7 за постоење на периодични решенија. Навистина, општото решение на $(*)$ е

$$z = e^{\cos x}\left[C - (1 + \cos x)e^{-\cos x}\right]$$

што е периодична функција и имаме

$$y = \frac{1}{z} = \frac{e^{-\cos x}}{C - (1 + \cos x)e^{-\cos x}} = \frac{1}{C\,e^{\cos x} - (1 + \cos x)}$$

што е исто така периодично решение со основен период $\omega^* = 2\pi$.

Литература

[1] P. Hartman: *Ordinary differential equations,* Moskva 1970 (in Russian).

[2] J. Митевска: *Тригонометрии од* IV *и* VI red, Докторска дисертација, Скопје 1995.

[3] И. Камке: *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям,* Москва 1971.

QUASIPERIODICITY OF THE SOLUTIONS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER

Jordanka Mitevska*, Marija Kujumdzieva-Nikoloska** and Dragan Dimitrovski*

Summary

In this paper we give some conditions for existing quasi-periodic solutions for the differential equation

$$y' + f(x)y + g(x) = 0 \tag{1}$$

i.e. solutions which satisfy the relation

$$y\big(x + \omega(x)\big) = \lambda y(x)\,. \tag{2}$$

We formulate seven propositions for existing quasi-periodic solutions for (1), and in a special case periodic solutions determined by (3).

* University "Sv. Kiril and Metodij"
Faculty of Natural Sciences and Mathematics
Institute of Mathematics
P.O. Box 162
1000 Skopje
Republic of Macedonia

e-mail: jordankam@ukim.edu.mk

** University "Sv. Kiril and Metodij"
Faculty of Electrical Engineering
1000 Skopje
Republic of Macedonia

e-mail: marekn@etf.ukim.edu.mk