Математички Билтен ISSN 0351–336X
28 (LV)
2004 (35–44)
Скопје, Македонија

ТЕОРЕМА НА ASCOLI-MAZUR ВО n-НОРМИРАН ПРОСТОР

Ристо Малчески

Апстракт

Во оваа работа е докажана теоремата на Ascoli-Mazur во случај на n-нормирани простори, која е природно воопштување на соодветната теорема за нормирани простори.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n>1$ и $\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\geq 0$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|=0$ ако и само ако множеството $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|=\|\pi(x_1),\pi(x_2),\dots,\pi(x_n)\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и за секоја биекција $\pi\colon\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

iii) $\|\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\|=|\alpha|\cdot\|x_1,x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$.

iv) $\|x_1+x_1',x_2,\dots,x_n\|\leq\|x_1,x_2,\dots,x_n\|+\|x_1',x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,\dots,x_n,x_1'\in L$.

Функцијата $\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|$ се нарекува n-норма на L, а $(L,\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|)$ се нарекува реален n-нормиран простор.

Нека $(L, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|)$ е реален n- нормиран простор и $\phi\colon L\times\ldots\times L\to\mathbf{R}$ е произволен n-функционал.

Десен парцијален извод на n-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,\ldots,x_n)$ во правец на y е

$$\phi'_{1^+}(x_1,\ldots,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,\ldots,x_n)-\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Лев парцијален извод на n-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ во правец на y е

$$\phi'_{1^-}(x_1,\ldots,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,\ldots,x_n)-\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Ако левиот и десниот парцијален извод на n-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,\ldots,x_n)$ во правец на y постојат и се еднакви, тогаш ќе велиме дека n-функционалот ϕ е диференцијабилен по x_1 во точката $(x_1,\ldots,x_n)$ во правец на y, т.е. постои $\phi'_1(x_1,\ldots,x_n)(y)$, при што

$$\phi'_1(x_1,\ldots,x_n)(y)=\phi'_{1^+}(x_1,\ldots,x_n)(y)=\phi_{1^-}(x_1,\ldots,x_n)(y).$$

Аналогно се дефинираат парцијалните изводи

$$\phi'_i(x_1,\ldots,x_n)(y),\ \phi'_{i^+}(x_1,\ldots,x_n)(y),\ \text{и}\ \phi'_{i^-}(x_1,\ldots,x_n)(y),\ i=2,3,\ldots,n.$$

Во [2] е разгледан n-функционалот $\phi : L\times\ldots\times L\to R$, дефиниран со

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\|x_1,\ldots,x_n\|,$$

и неговата диференцијабилност и се докажани се следниве тврдења.

Лема 1. *Нека $(L,\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|)$ е реален n-нормиран простор. Тогаш постои*

$$\phi'_{1^+}(x_1,\ldots,x_n)(y)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x_1+ty,x_2,\ldots,x_n\|-\|x_1,\ldots,x_n\|}{t},$$

и важи

$$-\|y,x_2,\ldots,x_n\|\le\varphi'_{1^+}(x_1,\ldots,x_n)(y)\le\|y,x_2,\ldots,x_n\|.\qquad\square$$

Теорема 1. *За секои $x_1, x_2, \dots, x_n, y, y' \in L$ важат следните својства:*

i) $\varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(y+y') \leq \varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(y) + \varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(y')$;

ii) *За секој* $\alpha > 0$ *важи* $\varphi'_{1+}(\alpha x_1, \dots, x_n)(y) = \varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(y)$;

iii) *За секој* $\alpha \geq 0$ *важи* $\varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1+}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y)$;

iv) *За секој* $\alpha \geq 0$ *важи* $\varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1, \dots, x_n\|$; *и*

v) $\|x_1 + ty, x_2, \dots, x_n\| \geq \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$, *за секој* $t \in \mathbf{R}$ *ако и само ако*

$$-\varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(-y) \leq 0 \leq \varphi'_{1+}(x_1, \dots, x_n)(y). \qquad \square$$

1. Три леми

Во овој дел, пред да ја дадеме генерализацијата на теоремата на Ascoli-Mazur за n-нормиран простор, ќе докажеме три леми.

Нека L е n-нормиран простор. За n-функционалот f со домен $D(f) \subseteq L^n$, ќе велиме дека е ограничен ако постои реална константа $k \geq 0$ таква што

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq k\|x_1, x_2, \dots, x_n\|, \text{ за секој } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f).$$

Ако f е ограничен n-функционал, дефинираме норма на f, во ознака $\|f\|$, со

$$\begin{aligned}\|f\| = \inf\{k|\ &|f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \\ &\leq k\|x_1, x_2, \dots, x_n\|, \text{ за секој } \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)\}.\end{aligned}$$

Ако f не е ограничен n-функционал, тогаш по дефиниција ставаме $\|f\| = +\infty$.

Лема 2. *Нека $(L, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ е n-нормиран векторски простор, $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ и $f\colon L \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n) \to \mathbf{R}$ е линеарен ограничен n-функционал со својства*

$$\begin{aligned}&f(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) = \|x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\|, \\ &f(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \leq \|y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\|, \\ &\text{за секој } \ y \in L \text{ и за секои} \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}.\end{aligned} \tag{1}$$

Тогаш,

$$\begin{aligned}-\varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(-y) &\leq f(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \\ &\leq \varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(y),\end{aligned}$$

за секој $y \in L$ *и за секои* $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$.

Доказ. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$, $\alpha_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$, $t > 0$ и f е линеарен ограничен n-функционал за кој важат својствата (1). Тогаш,

$$\begin{aligned}&\|x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\| + tf(y, \alpha_2 x_2, \dots, a_n x_n) = \\ &= f(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) + tf(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \\ &= f(x_1 + ty.\alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \\ &\leq \|x_1 + ty, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\|.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$f(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \leq \frac{\|x_1 + ty, x_2, \dots, \alpha_n x_n\| - \|x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\|}{t}$$

и ако земеме $t \to 0^+$ добиваме

$$f(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \leq \varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(y).$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}(y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) &= -f(-y, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \\ &\geq \varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(-y). \qquad \square\end{aligned}$$

Лема 3. *Нека* $(L, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ *е* n*-нормиран векторски простор,* $y_1, x_1, x_2, \dots, x_n \in L$, $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ *и* $y = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1$. *Тогаш,*

$$\begin{aligned}\varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(y) =& \alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \\ &+ |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1+}(x_1, x_2, \dots, x_n)(\beta_1 y_1)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)(-y) =& -\alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \\ &+ |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1+}(x_1, x_2, \dots, x_n)(-\beta_1 y_1).\end{aligned}$$

Доказ. Постои $\varepsilon > 0$ таков што за секој $t < \varepsilon$ важи $1 + \alpha_1 t > 0$, односно

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left[\, \|x_1 + ty, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\| - \|x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n\| \,\right] = \\ &= \frac{1}{t} |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \left[\, \|x_1 + ty, x_2, \dots, x_n\| - \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \,\right] \\ &= \frac{1}{t} |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \left[\, \|(1 + \alpha_1 t) x_1 + t\beta_1 y_1, x_2, \dots, x_n\| - \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \,\right] \\ &= \alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \\ &\quad + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \frac{\|x_1 + \frac{t}{1 + \alpha_1 t} \beta_1 y_1, x_2, \dots, x_n\| - \|x_1, x_2, \dots, x_n\|}{\frac{t}{1 + \alpha_1 t}}\end{aligned}$$

па затоа ако земеме $t \to 0^+$ добиваме

$$\begin{aligned}\varphi'_{1^+}(x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n)(y) = & \alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| \\ & + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1^+}(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\beta_1 y_1).\end{aligned}$$

Исто така, постои $\varepsilon > 0$ таков што за секој $t < \varepsilon$ важи $1 - \alpha_1 t > 0$, односно

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left[\,\|x_1 - ty, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n\| - \|x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n\|\,\right] = \\ &= \frac{1}{t}|\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n|\,[\|x_1 - ty, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|] \\ &= \frac{1}{t}|\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n|\,[\|(1-\alpha_1 t)x_1 + t(-\beta_1 y_1), x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|] \\ &= -\alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| \\ &\quad + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \frac{\|x_1 + \frac{t}{1-\alpha_1 t}(-\beta_1 y_1), x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{\frac{t}{1-\alpha_1 t}}\end{aligned}$$

па затоа ако земеме $t \to 0^+$ добиваме

$$\begin{aligned}\varphi_{1^+}(x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha x_n)(-y) = & \ \alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| \\ & + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1^+}(x_1, x_2, \ldots, x_n)(-\beta_1 y_1). \qquad \square\end{aligned}$$

Лема 4. *Нека* $(L^n, \|\cdot, \cdot, \ldots, \cdot\|)$ *е n-нормиран векторски простор,* $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ *и* $\delta \in \mathbf{R}$ *се такви што*

$$-\varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(-y_1) \le \delta \le \varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(y_1)\,.$$

Тогаш, за секој $\beta \in \mathbf{R}$ *важи*

$$-\varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(-\beta y_1) \le \beta\delta \le \varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(\beta y_1).$$

Доказ. Ако $\beta \ge 0$, тогаш

$$-\beta\varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(-y_1) \le \beta\delta \le \beta\varphi'_{1^+}(x_1, \ldots, x_n)(y_1),$$

па, од теорема 1 следува

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-\beta y_1) \leq \beta\delta \leq \varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(\beta y_1).$$

Ако $\beta < 0$, тогаш

$$-\beta\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-y_1) \geq \beta\delta \geq -(-\beta)\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(y_1),$$

и повторно од теорема 1 добиваме

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-\beta y_1) \leq \beta\delta \leq \varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(\beta y_1). \qquad \square$$

2. Теорема на Ascoli-Mazur во n-нормиран простор

Нека X_i, $i = 1,2,\ldots,n$ се реални векторски простори. Функцијата $p\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to \mathbf{R}$ ја нарекуваме:

а) апсолутно хомогена, ако

$$p(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n) = |\lambda_1\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

за секои $x_i \in X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ и за секои $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$;

б) субадитивна, ако

$$p(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \leq \sum_{\substack{z_i \in \{x_i, y_i\} \\ i=1,2,\ldots,n}} p(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

за секои $x_i, y_i \in X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема 2. (**Ascoli-Mazur**). *Нека $(L^n, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|)$ е n-нормиран векторски простор, $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ и $\delta \in \mathbf{R}$ се такви што*

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-y_1) \leq \delta \leq \varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(y_1). \tag{1}$$

Тогаш, постои линеарен n-функционал

$$F\colon L \times P(x_2) \times \ldots \times P(x_n) \to \mathbf{R}$$

таков што

$$F(x_1,\dots,x_n)=\|x_1,\dots,x_n\|,\quad F(y_1,x_2,\dots,x_n)=\delta,$$

и

$$F(u,\alpha_2x_2,\dots,\alpha_nx_n)\le\|u,\alpha_2x_2,\dots,\alpha_nx_n\|,$$

за секој $u\in L$ *и за секои* $\alpha_2,\dots,\alpha_n\in R$.

Доказ. Нека $y_1,x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и $\delta\in R$ се такви што важат неравенствата (1). Со M да го означиме подпросторот од L генериран од x_1 и y_1, т.е. $M=P(x_1,y_1)$. Дефинираме n-функционал

$$f\colon M\times P(x_2)\times\ldots\times P(x_n)\to\mathbf{R}$$

со

$$f(\alpha_1x_1+\beta_1y_1,\alpha_2x_2,\dots,\alpha_nx_n)=\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n\|x_1,\dots,x_n\|+\beta_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n\delta.$$

Ќе докажеме дека функционалот f е линеарен. Имаме:

$$\begin{aligned}
&f(z_1+w_1,z_2+w_2,\dots,z_n+w_n)=\\
&=f\big((\alpha_1+\beta_1y_1)+(\alpha_1'x_1+\beta_1'y_1),\alpha_2x_2+\alpha_2'x_2,\dots,\alpha_nx_n+\alpha_n'x_n\big)\\
&=f\big((\alpha_1+\alpha_1')x_1+(\beta_1+\beta_1')y_1,(\alpha_2+\alpha_2')x_2,\dots,(\alpha_n+\alpha_n')x_n\big)\\
&=(\alpha_1+\alpha_1')(\alpha_2+\alpha_2')\dots(\alpha_n+\alpha_n')\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\\
&\quad+(\beta_1+\beta_1')(\alpha_2+\alpha_2')\dots(\alpha_n+\alpha_n')\delta\\
&=(\alpha_1+\alpha')\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\alpha_i'\}\\ i=2,\dots,n}}t_2\cdot\ldots\cdot t_n\\
&\quad+(\beta_1+\beta_1')\delta\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\alpha_i'\}\\ i=2,\dots,n}}t_2\cdot\ldots\cdot t_n\\
&=\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\alpha_i'\}\\ i=2,\dots,n}}(\alpha_1t_2\cdot\ldots\cdot t_n\|x_1,x_2,\dots,x_n\|+\beta_1t_2\cdot\ldots\cdot t_n\delta)\\
&\quad+\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\alpha_i'\}\\ i=2,\dots,n}}(\alpha_1't_2\cdot\ldots\cdot t_n\|x_1,x_2,\dots,x_n\|+\beta_1't_2\cdot\ldots\cdot t_n\delta)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{t_i \in \{\alpha_i, \alpha_i'\} \\ i=2,\dots,n}} f(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, t_2 x_2, \dots, t_n x_n)$$

$$+ \sum_{\substack{t_i \in \{\alpha_i, \alpha_i'\} \\ i=2,\dots,n}} f(\alpha_1' x_1 + \beta_1' y_1, t_2 x_2, \dots, t_n x_n)$$

$$= \sum_{\substack{u_i \in \{z_i, w_i\} \\ i=2,\dots,n}} f(z_1, u_2, \dots, u_n) + \sum_{\substack{u_i \in \{z_i, w_i\} \\ i=2,\dots,n}} f(w_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$= \sum_{\substack{u_i \in \{z_i, w_i\} \\ i=1,\dots,n}} f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

и

$$f(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \dots, \lambda_n z_n) = f(\lambda_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1), \lambda_2 \alpha_2 x_2, \dots, \lambda_n \alpha_n x_n)$$
$$= f(\lambda_1 \alpha_1 x_1 + \lambda_1 \beta_1 y_1, \lambda_2 \alpha_2 x_2, \dots, \lambda_n \alpha_n x_n)$$
$$= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)\|x_1, \dots, x_n\| + (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)(\beta_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)\delta$$
$$= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)[\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \|x_1, \dots, x_n\| + \beta_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \delta]$$
$$= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) f(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)$$
$$= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) f(z_1, z_2 \dots, z_n).$$

Сега да забележиме дека n-функционалот

$$p: L \times P(x_2) \times \ldots P(x_n) \to R$$

дефиниран со

$$p(z_1, z_2, \dots, z_n) = \|z_1, z_2, \dots, z_n\|$$

е апсолутно хомоген и субадитивен. Ќе докажеме дека на $M \times P(x_2) \times \ldots \times P(x_n)$ важи

$$f(y, z_2, \dots, z_n) \leq p(y, z_2, \dots, z_n).$$

Имаме

$$f(y, z_2, \dots, z_n) = f(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)$$
$$= \alpha_1, \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \|x_1, x_2, \dots, x_n\| + \beta_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \delta.$$

Ќе разгледаме два случаи: $\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n > 0$ и $\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n < 0$. Ако $\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n > 0$, тогаш од лемите 3, 4 и 1 следува

$$\begin{aligned}
f(y, z_2, \ldots, z_n) &= f(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \|x_1, \ldots, x_n\| + \beta_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \delta \\
&\leq \alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, \ldots, x_n\| + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1+}(x_1, \ldots, x_n)(\beta_1 y_1) \\
&= \varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n)(y) \leq \|y, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n\| \\
&= \|y, z_2, \ldots, z_n\| = p(y, z_2, \ldots, z_n).
\end{aligned}$$

Ако $\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n < 0$ тогаш од лемите 3, 4, и 1 добиваме

$$\begin{aligned}
f(y, z_2, \ldots, z_n) &= f(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \|x_1, \ldots, x_n\| + \beta_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \delta \\
&= -\alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, \ldots, x_n\| - \beta_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \delta \\
&\leq -\alpha_1 |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \|x_1, \ldots, x_n\| \\
&\quad + |\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \varphi'_{1+}(x_1, \ldots, x_n)(-\beta_1 y_1) \\
&= \varphi'_{1+}(x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n)(-y) \leq \|-y, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n\| \\
&= \|y, z_2, \ldots, z_n\| = p(y, z_2, \ldots, z_n).
\end{aligned}$$

Конечно, тврдењето на теоремата следува од теорема 2, [3] и дефиницијата на n-функционалот f. □

Литература

[1] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори,*Мат. бил. 20 (1996).

[2] Малчески, Р.: *Gateaux изводи за n-норма,* Мат. бил. 27 (2003).

[3] Malčeski, R.: *The Hahn-Banach theorem for bounded n-linear functionals,* Mat. bil. 23 (1999).

[4] Misiak, A.: *n-Inner Product Spaces,*Math.Nachr. 140 (1989)

[5] Rudin, W: *Functional Analysis,*2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, (1991)

THEOREM OF ASCOLI-MAZUR FOR n-NORMED SPACES

Risto Malčeski

S u m m a r y

In this paper is proved the theorem of Ascoli-Mazur for n-normed spaces, which is generalizacion of the theorem of Ascoli-Mazur for normed spaces.

Faculty for social sciences
1000 Skopje
R. Macedonia