Математички Билтен
27 (LIII)
2003 (107–112)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТА НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ТРЕТ РЕД СО ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Елена Хаџиева* и Боро Пиперевски**

Апстракт

Во трудов се разгледува хомогена линеарна диференцијална равенка од трет ред чии коефициенти се полиноми. Редот на секој извод е ист со степенот на соодветниот коефициент. Добиени се услови за егзистенција на општо решение, како и услови за егзистенција на општо полиномно решение и тие решенија се конструирани.

Во овој труд се разгледува линеарна диференцијална равенка од вид:

$$(x-a)(x-b)(x-c)y''' + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)y'' + (\gamma_1 x + \gamma_0)y' + \delta y = 0, \quad (1)$$

каде a, b, c, β_2, β_1, β_0, γ_1, γ_0, δ се реални константи и $a \neq b \neq c$, $y = y(x)$.

Во [1] равенка од вид (1) е третирана од аспект на егзистенција и конструкција на нејзини полиномни решенија и се добиени некои специјални случаи на нејзина редуктибилност на систем линеарни равенки од прв ред.

Во [4] е третиран проблемот за редуктибилност на линеарна хомогена диференцијална равенка од втор ред од вид:

$$(x-a)(x-b)y'' + (b_1 x + b_0)y' + c_0 y = 0,$$

каде a, b, b_1, b_0, c_0 се реални константи и $a \neq b$, $y = y(x)$.

Нека го разгледаме системот диференцијални равенки од прв ред од вид:

$$\begin{aligned} (x-a)y' + A_1 y + A_2 z &= 0,\\ (x-b)z' + B_2 z + B_3 w &= 0,\\ (x-c)w' + C_3 w &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

каде a, b, c, A_1, A_2, B_2, B_3, C_3 се реални константи и $a \neq b \neq c$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, $w = w(x)$.

Со метод на последователни диференцирања и метод на елиминација од системот (2) се добива диференцијална равенка од трет ред:

$$\begin{aligned} &(x-a)(x-b)(x-c)y''' + [C_3(x-a)(x-b)\\ &+ (A_1+2)(x-b)(x-c) + (B_2+1)(x-a)(x-c)]y''\\ &+ [C_3(A_1+1)(x-b) + C_3B_2(x-a)+\\ &+ (A_1+1+B_2+A_1B_2)(x-c)]y' + C_3A_1B_2y = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Равенката (1) се сведува на равенката (3) ако се задоволени следниве релации:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= C_3 + A_1 + 2 + B_2 + 1,\\ \beta_1 &= -[C_3(a+b) + (A_1+2)(b+c) + (B_2+1)(a+c)],\\ \beta_0 &= C_3ab + (A_1+2)bc + (B_2+1)ac,\\ \gamma_1 &= (C_3+1)(A_1+B_2+1) + A_1B_2,\\ \gamma_0 &= -[C_3B_2a + C_3(A_1+1)b + (A_1+1+B_2+A_1B_2)c],\\ \delta &= C_3A_1B_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Од првите три релации се добиваат параметрите C_3, A_1, B_2 со формулите:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)},\\ A_1 &= \frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} - 2,\\ B_2 &= \frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Според тоа, услови равенката (1) да се сведе во вид (3) се последните три релации од релациите (4):

$$\begin{aligned} \gamma_1 =& [\frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)} + 1][\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} + \frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 2]+\\ &+ (\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} - 2)(\frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 1), \end{aligned}$$

$$\gamma_0 = -\{\frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)}[\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} - 1]b + \tag{6}$$
$$+ \frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)}(\frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 1)a + [\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} +$$
$$+ \frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 2 + (\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} - 2)(\frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 1)]c\},$$
$$\delta = \frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)}(\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} - 2)(\frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} - 1).$$

Од системот (2) со последователно решавање се добиваат формулите за негово општо решение:

$$\begin{aligned} w =& K_1(x-c)^{-C_3} + K_2 \cdot 0 + K_3 \cdot 0, \\ z =& K_1 B_3 (x-b)^{-B_2} \int (x-c)^{-C_3}(x-b)^{B_2-1}dx + K_2(x-b)^{-B_2} + K_3 \cdot 0, \\ y =& K_1 B_3 A_2 (x-a)^{-A_1} \int [(x-a)^{A_1-1}(x-b)^{-B_2} \times \\ & \int (x-c)^{-C_3}(x-b)^{B_2-1}dx]dx + K_2 A_2 (x-a)^{-A_1} \times \\ & \int (x-a)^{A_1-1}(x-b)^{-B_2}dx + K_3(x-a)^{-A_1} \end{aligned} \tag{7}$$

каде K_1, K_2, K_3 се произволни константи.

Теорема 1. *Нека е дадена диференцијалната равенка* (1). *Равенката* (1) *е редуктибилна и може да се сведе на систем од вид* (2) *ако се задоволени условите* (6). *При тоа, општото решение ќе биде дадено со формулата:*

$$y = (x-a)^{-A_1}\{K_3 + \int (x-a)^{A_1-1}(x-b)^{-B_2}[K_2 + K_1 \int (x-c)^{-C_3}(x-b)^{B_2-1}dx]dx\}, \tag{8}$$

каде C_3, B_2, A_1 *се дадени со формулите* (5) *и* K_1, K_2, K_3 *се произволни константи.*

Пример 1. Диференцијалната равенка:

$$x(x-2)(x-1)y''' + (x^2 - x + 2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

ги задоволува условите (6) и има општо решение

$$y = K_3 x + K_2 x\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right) + \frac{K_1}{3}x\left(x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x^5}\right|\right)$$

а се сведува на системот

$$\begin{aligned} xy' - y + z &= 0 \\ (x-2)z' + z + w &= 0 \\ (x-1)w' - 2w &= 0. \end{aligned}$$

Нека постојат природни броеви m, n, p така што $C_3 = -n$, $A_1 = -(n+m+p)$, $B_2 = -(n+m)$. Тогаш системот (2) за $A_2 = 1$, $B_3 = 1$ ќе биде од вид

$$\begin{aligned}(x-a)y' - (n+m+p)y + z &= 0,\\ (x-b)z' - (n+m)z + w &= 0,\\ (x-c)w' - nw &= 0,\end{aligned} \tag{9}$$

а општото решение во согласност со (7) ќе биде дадено со формулите

$$\begin{aligned} w =& K_1(x-c)^n,\\ z =& (x-b)^{n+m}[K_2 + K_1 \textstyle\int (x-c)^n (x-b)^{-(n+m+1)} dx],\\ y =& (x-a)^{n+m+p}\{K_3 + \textstyle\int (x-a)^{-(n+m+p+1)}(x-b)^{n+m}\\ &\times [K_2 + K_1 \textstyle\int (x-c)^n (x-b)^{-(n+m+1)} dx] dx\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Соодветната диференцијална равенка во согласност со (3) ќе биде од вид

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)y''' + \{(-3n-2m-p+3)x^2 +\\ &+ [n(2a+2b+2c) + m(a+b+2c) + p(b+c) - (a+2b+3c)]x -\\ &- n(ab+bc+ac) - mc(a+b) - pbc + c(a+2b)\}y'' +\\ &+ \{[(n+m)(3n+m+p-2) + (p-1)(n-1)]x +\\ &+ (n+m)[-n(a+b) + (2-n-m-p)c] + (p-1)(c-nb)\}y' -\\ &- n(n+m)(n+m+p)y = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

чие општо решение во согласност со (10) ќе биде дадено со формулата

$$\begin{aligned}y =& (x-a)^{n+m+p}\{K_3 +\\ &+ \textstyle\int (x-a)^{-(n+m+p+1)}(x-b)^{n+m}[K_2 + K_1 \textstyle\int (x-c)^n (x-b)^{-(n+m+1)} dx] dx\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 2. *Нека е дадена диференцијална равенка од вид* (1). *Ако постојат природни броеви* n, m, p *такви што*

$$n = -\frac{c^2\beta_2 + c\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(b-c)}, \quad m = -[\frac{b^2\beta_2 + b\beta_1 + \beta_0}{(b-a)(b-c)} + n - 1],$$

$$p = -[\frac{a^2\beta_2 + a\beta_1 + \beta_0}{(a-c)(a-b)} + n + m - 2] \tag{13}$$

и кои ги задоволуваат условите:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= -3n - 2m - p + 3, \\
\beta_1 &= n(2a + 2b + 2c) + m(a + b + 2c) + p(b + c) - (a + 2b + 3c), \\
\beta_0 &= -n(ab + bc + ac) - mc(a + b) - pbc + c(a + 2b), \\
\gamma_1 &= (n + m)(3n + m + p - 2) + (p - 1)(n - 1), \\
\gamma_0 &= (n + m)[-n(a + b) + (2 - n - m - p)c] + (p - 1)(c - nb), \\
\delta &= -n(n + m)(n + m + p),
\end{aligned} \tag{14}$$

тогаш равенката (1) *е редуктибилна и се сведува на системот* (9). *При тоа равенката ќе биде од вид* (11) *и има општо решение полином дадено со формулата* (12).

Оваа теорема е директна последица на Теорема 1.

Во [3] истиот резултат е добиен со друга постапка. Во [2] е разгледуван специјален случај на системот (9) односно равенката (11) за $m = p = 1$.

Пример 2. Диференцијалната равенка

$$(x-1)(x-2)(x-3)y''' + (-4x^2 + 17x - 11)y'' + (8x - 17)y' - 8y = 0,$$

ги задоволува условите (13) за $n = 1, m = 1, p = 2$ и има општо решение

$$y = K_3(8x - 17) + K_2(6x^2 - 20x + 17) + K_1(x - 1)^4,$$

а се сведува на системот

$$\begin{aligned}
(x-1)y' - 4y + z &= 0, \\
(x-2)z' - 2z + w &= 0, \\
(x-3)w' - w &= 0.
\end{aligned}$$

Литература

[1] Пиперевски Боро М.: *Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена,* Докторска дисертација, Математички факултет (1982) Скопје.

[2] Шапкарев Илија А.: *За една редуктибилна хомогена линеарна диференцијална равенка чиј општ интеграл е полином;* Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Зборник на трудови ISBN 9989-630-37-2, стр. 73-84, (2003), Скопје.

[3] Шапкарев Илија А.: *Полином како општо решение на една хомогена линеарна диференцијална равенка од трети ред,* Втор конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, Зборник на трудови, стр. 105-109, (2000), Охрид.

[4] Шапкарев Илија А., Пиперевски Боро М., Хаџиева Елена, Серафимова Невена, Митковска Трендова Катерина: *За една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред чие општо решение е полином; Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки,* Зборник на трудови ISBN 9989-630-37-2, стр. 27-39, (2003), Скопје.

ON REDUCIBILITY OF A CLASS OF A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Elena Hadzieva* and Boro Piperevski**

S u m m a r y

A homogeneous linear differential equation of third order with polynomial coefficients is considered in this article.

Theorem 1. *Given a differential equation* (1). *The equation* (1) *is reducible and can be reduced on system of type* (2) *if the conditions* (6) *are satisfied. The general solution is given by the formula* (8), *where* C_3, B_2, A_1 *are given by the formulae* (5) *and* K_1, K_2, K_3 *are any constants.*

Theorem 2. *Given a differential equation of type* (1). *If there exist natural numbers* n, m, p *such that* (13) *and* (14) *are satisfied, then the equation* (1) *is reducible and can be reduced on the system* (9). *The equation is of type* (11) *and has a polynomial as a general solution given by the formula* (12).

* University "St. Kiril i Metodij"
Faculty of Electrical Engineering
P.O.Box 574, 1000 Skopje
Republic of Macedonia
e-mail: hadzieva@etf.ukim.edu.mk

** University "St. Kiril i Metodij"
Faculty of Electrical Engineering
P.O.Box 574, 1000 Skopje
Republic of Macedonia
e-mail: borom@etf.ukim.edu.mk