Математички Билтен
25 (LI)
2001 (37–42)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ПОЛИНОМНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Боро Пиперевски

Апстракт

Теорема: *Нека е даден системот* (1) *и нека* $ABCD(AD-BC)\neq 0$. *Системот* (1) *има едно полиномно решение од степен* n *и нема друго ненулто полиномно решение од степен помал од* n *ако и само ако постои* $n\in N$ *кој е корен на квадратната равенка* (5). *Во случај два природни броја да се корени на равенката* (5), *тогаш* n *е помалиот.*

Притоа, полиномното решение е дадено со формулата (6).

Нека е даден систем линеарни диференцијални равенки од прв ред од вид:

$$\begin{aligned}(x-a)y'+Ay+Bz&=0\\(x-b)z'+Cy+Dz&=0\,,\end{aligned}\tag{1}$$

каде $a,b,A,B,C,D\in \boldsymbol{R}$ $y=y(x)$, $z=z(x)$.

Лема 1. *Системот* (1) *со смената*

$$\begin{aligned}y&=(x-a)^{-A}(x-b)^{1-D}u\,,\\z&=(x-a)^{1-A}(x-b)^{-D}v\,,\end{aligned}\tag{2}$$

каде u и v се нови функции, се трансформира во систем од ист вид:

$$\begin{aligned}(x-b)u' + (1-D)u + Bv = 0\\ (x-a)v' + Cu + (1-A)v = 0\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Доказ. Со директна замена на y и z и нивните изводи во системот (1), во согласност со смената (2), и по кратење со $(x-a)^{1-A}(x-b)^{-D}$ односно $(x-a)^{-A}(x-b)^{1-D}$ се добива системот (3).

Дефиниција 1. *Системот* (1) *има полиномно решение од степен n ако има решение $y = P_n(x)$, $z = Q_n(x)$, каде $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ се полиноми од степен n*

Лема 2. *Нека е даден системот* (1) *и нека $ABCD \neq 0$. Системот* (1) *има едно ненулто решение полином од нулти степен ако и само ако важи*

$$AD - BC = 0\,. \tag{4}$$

Доказ. Нека системот (1) има едно ненулто решение од нулти степен $y = K_1$, $z = K_2$, $K_1, K_2 \neq 0$, K_1, K_2 – константи. Со замена во (1) се добива дека K_1 и K_2 се ненулти решенија на линеарен хомоген систем од две равенки т.е.

$$\begin{aligned}AK_1 + BK_2 = 0\,,\\ CK_1 + DK_2 = 0\,.\end{aligned}$$

Според тоа детерминантата на овој систем е еднаква на нула со што се добива (4).

Обратно нека сега важи условот (4). Тогаш добиваме

$$\frac{D}{B} = \frac{C}{A} = K\,(\neq 0) \qquad \text{и} \quad D = BK, \quad C = AK$$

со што системот (1) се сведува на системот

$$\begin{aligned}(x-a)y' + Ay + Bz = 0\\ (x-b)z' + KAy + KBz = 0\,.\end{aligned}$$

Од овој систем се добива равенката $K(x-a)y' - (x-b)z' = 0$ чие едно ненулто решение е $y = K_1$, $z = K_2$, $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, K_1, K_2 – константи. Ако ги избереме константите K_1 и K_2 така што $AK_1 + BK_2 = 0$, тогаш $y = K_1$ и $z = K_2$ ќе биде едно ненулто решение на системот (1).

Ако ставиме $K_1 = 1$ тогаш $y = 1$ и $z = -\dfrac{A}{B}$ е едно ненулто решение на системот (1) како полином од нулти степен.

Теорема 1. *Нека е даден системот* (1) *и нека* $ABCD(AD - BC) \neq 0$. *Системот* (1) *има едно полиномно решение од степен* n *и нема друго ненулто полиномно решение од степен помал од* n *ако и само ако постои* $n \in N$ *кој е корен на квадратната равенка*

$$(A+t)(D+t) - BC = 0. \tag{5}$$

Во случај два природни броја да се корени на равенката (5), тогаш n е помалиот.

Притоа полиномното решение е дадено со формулата

$$\begin{aligned} y &= (x-a)^{-A}(x-b)^{1-D}\left[(x-a)^{A+n}(x-b)^{D+n-1}\right]^{(n)}, \\ z &= -\frac{A+n}{B}(x-a)^{1-A}(x-b)^{-D}\left[(x-a)^{A+n-1}(x-b)^{D+n}\right]^{(n)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказ. Нека (1) има едно полиномно решение $y = P_n(x)$, $z = Q_n(x)$, каде $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ се полиноми од степен n и нека нема друго ненулто полиномно решение од степен помал од n. По n последователни диференцирања на системот (1) се добива системот

$$\begin{aligned} (x-a)y^{(n+1)} + (A+n)y^{(n)} + Bz^{(n)} &= 0 \\ (x-b)z^{(n+1)} + Cy^{(n)} + (D+n)z^{(n)} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Со замена на полиномното решение во системот (7) се добива дека $P_n^{(n)}(x) = K_1 \neq 0$, $Q_n^{(n)}(x) = K_2 \neq 0$. K_1, K_2 – константи, се ненулти решенија на линеарен хомоген систем од две равенки т.е.

$$\begin{aligned} (A+n)P_n^{(n)}(x) + BQ_n^{(n)}(x) &= 0 \\ CP_n^{(n)}(x) + (D+n)Q_n^{(n)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

при што $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, $Q_n^{(n+1)}(x) = 0$. Според тоа детерминантата на овој систем е еднаква на нула т.е. $(A+n)(D+n) - BC = 0$, што значи n е корен на равенката (5).

Обратно, нека постои природен број n (помалиот ако се два) кој е корен на равенката (5) и нека го разгледаме системот (7). Нека во системот (7) воведеме смена $y^{(n)} = u$, $z^{(n)} = v$ со што го добиваме системот

$$\begin{aligned} (x-a)u' + (A+n)u + Bv &= 0 \\ (x-b)v' + Cu + (D+n)v &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Според условот (5) и условот $ABCD(AD-BC)\neq 0$ следи $A+n\neq 0$ и $D+n\neq 0$. Бидејќи $(A+n)(D+n)-BC=0$, според лемата 2 системот (8) има едно ненулто решение од нулти степен $u=1$, $v=-\dfrac{A+n}{B}$. Во согласност со постапката за добивање на системот (8) и условот (5), следи дека системот (1) има полиномно решение од степен n.

Нека претпоставиме дека системот има и друго полиномно решение $y=P_k(x)$, $z=Q_k(x)$ од степен $k<n$. Тогаш по k последователни диференцирања на системот (1) ќе се добие системот

$$(x-a)y^{(k+1)}+(A+k)y^{(k)}+Bz^{(k)}=0$$

$$(x-b)z^{(k+1)}+Cy^{(k)}+(D+k)z^{(k)}=0\,.$$

Земајќи предвид дека $P_k^{(k+1)}(x)=0$, $Q_k^{(k+1)}(x)=0$, $P_k^{(k)}(x)=K_1\neq 0$, $Q_k^{(k)}(x)=K_2\neq 0$, K_1,K_2 – константи, со директна замена во последниот систем на тоа решение се добива дека K_1 и K_2 се ненулти решенија на линеарен хомоген систем од две равенки т.е.

$$(A+k)K_1+BK_2=0\,,$$

$$CK_1+(D+k)K_2=0\,.$$

Според тоа детерминантата на тој систем е еднаква на нула т.е. $(A+k)(D+k)-BC=0$. Бидејќи $k<n$, последното равенство е спротивно на претпоставката и заклучуваме дека системот (1) нема друго полиномно решение од степен помал од n.

Нека системот (1) има полиномно решение од степен n. По n последователни диференцирања на системот (1) се добива системот (7). Ако во системот (7) ставиме смена $y^{(n)}=p$, $z^{(n)}=q$, ќе го добиеме системот

$$\begin{aligned}(x-a)p'+(A+n)p+Bq&=0\,,\\ (x-b)q'+Cp+(D+n)q&=0\,,\end{aligned}\tag{10}$$

од кој со трансформацијата

$$\begin{aligned}p&=(x-a)^{-(A+n)}(x-b)^{1-(D+n)}w_1\,,\\ q&=(x-a)^{1-(A+n)}(x-b)^{-(D+n)}w_2\,,\end{aligned}\tag{11}$$

во согласност со лема 1 се добива системот

$$\begin{aligned}(x-b)w_1^{(n+1)}+(1-D)w_1^{(n)}+Bw_2^{(n)}&=0\,,\\ (x-a)w_1^{(n+1)}+Cw_1^{(n)}+(1-A)w_2^{(n)}&=0\,.\end{aligned}\tag{12}$$

Со повторна смена

$$\begin{aligned} w_1^{(n)} &= (x-b)^{-(1-D)}(x-a)^{1-(1-A)}u\,, \\ w_2^{(n)} &= (x-b)^{-(1-D)}(x-a)^{1-(1-A)}v\,, \end{aligned} \tag{13}$$

во системот (12), се добива системот

$$\begin{aligned} (x-a)u' + Au + Bv = 0\,, \\ (x-b)v' + Cu + Dv = 0\,, \end{aligned}$$

односно системот (1) при што

$$u = y\,, \quad v = z\,. \tag{14}$$

Бидејќи важи условот $(A+n)(D+n)-BC=0$, системот (10) во согласност со лема 2 има едно ненулто полиномно решение од нулти степен дадено со формулите

$$p = 1\,, \quad q = -\frac{A+n}{B} \tag{15}$$

Во согласност со смените (11), (13), (14) и постапката за добивање на системот (12), од формулите (15) се добиваат формулите (6).

Пример 1. Системот

$$\begin{aligned} (x-1)y' + y + 2z = 0\,, \\ (x-2)z' - 4y - 5z = 0\,, \end{aligned}$$

има едно полиномно решение дадено со формулите:

$$y = -3x + 1\,, \quad z = 3x - 2\,.$$

Пример 2. Системот

$$\begin{aligned} (x-1)y' + y + z = 0\,, \\ (x-2)z' - 3y - \frac{5}{2}z = 0\,, \end{aligned}$$

има едно полиномно решение дадено со формулите:

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\,, \quad z = x + 1\,.$$

ON EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF A POLYNOMIAL SOLUTION OF A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS' SYSTEMS

B. Piperevski

Summary

Theorem. *Having* $ABCD(AD-BC) \neq 0$ *the system* (1) *has a polynomial solution, iff* $n \in N$ *exist and* n *is solution of equation* (5). *If equation* (5) *has two natural numbers' solutions then* n *is smaller.*

In this case the polynomial solution of the system (1) *wil be given by the formula* (6).

Faculty of Electrical Engineering
The "St. Kiril and Metodij" University,
P.O. Box 574
1000 Skopje
MACEDONIA