Математички Билтен ISSN 0351-336X
26 (LII)
2002 (117-124)
Скопје, Македонија

КОНТУРЕН ПРОБЛЕМ ОД ШЕСТИ РЕД КАКО ПРОИЗВОД НА КОНТУРНИ ПРОБЛЕМИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

Слободанка С. Георгиевска

Абстракт

Во овој труд дадени се услови кога контурен проблем од петти и шести ред има решение производ од решенијата на контурни проблеми од втор и трет ред при општи хомогени контурни услови.

0. Вовед

Формирање на линеарни диференцијални равенки чии интеграли се производ од интегралите на линеарни диференцијални равенки од втор и трет ред има во трудот [2].

Во трудот [1] се добиени услови кога контурни проблеми од трети и четврти ред имаат решение производ од решенијата на контурни проблеми од втор ред при општи хомогени контурни услови.

Во овој труд предмет на разгледување се контурни проблеми од петти и шести ред чие решение е производ од решенијата на контурни проблеми од втор и трет ред при општи линеарни хомогени контурни услови.

1. Определување на диференцијалните равенки

Нека ни се познати решенијата на контурниот проблем од втор ред

$$\mathbf{u}'' + \mathbf{h}\mathbf{u} = 0, \qquad (\mathbf{h} = \text{const.}) \tag{1.1}$$

$$\alpha_{\mathbf{i}0}\mathbf{u}_a + \alpha_{\mathbf{i}1}\mathbf{u}'_a = -(\beta_{\mathbf{i}0}\mathbf{u}_b + \beta_{\mathbf{i}1}\mathbf{u}'_b) \qquad (\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}), \tag{1.2}$$

и контурниот проблем од трет ред

$$\mathbf{v}''' + \mathbf{p}\mathbf{v}' + \mathbf{q}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{q} - \text{const.}) \tag{1.3}$$

$$\gamma_{\mathbf{j}0}\mathbf{v}_a + \gamma_{j1}\mathbf{v}'_a + \gamma_{\mathbf{j}2}\mathbf{v}''_a = -(\delta_{\mathbf{j}0}\mathbf{v}_b + \delta_{\mathbf{j}1}\mathbf{v}'_b + \delta_{\mathbf{j}2}\mathbf{v}''_b) \ (\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}), \tag{1.4}$$

каде $\mathbf{u}_\mathbf{c} = \mathbf{u}(\mathbf{c})$, $\mathbf{u}_\mathbf{c}{}' = \mathbf{u}'(\mathbf{c})$, односно $\mathbf{v}_\mathbf{c} = \mathbf{v}(\mathbf{c})$, $\mathbf{v}_\mathbf{c}{}' = \mathbf{v}'(\mathbf{c})$ и $\mathbf{v}_\mathbf{c}{}'' = \mathbf{v}''(\mathbf{c})$ за рангот на матриците од коефициентите $\alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}$ $(\mu = \mathbf{1}, \mathbf{2};\ \nu = \mathbf{0}, \mathbf{1}$ и $\gamma_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu}$ $(\mu = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3};\ \nu = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ соодветно е два односно три.

1.1. Теорема 1. *Ако функциите* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *соодветно се решенија на диференцијалните равенки* (1.1) *и* (1.3), *тогаш функцијата*

$$\mathbf{z} = \mathbf{u}\mathbf{v} \tag{1.5}$$

е решение на диференцијалната равенка

$$\mathbf{z}^{\mathrm{vi}} + (\mathbf{2p} + \mathbf{3h})\mathbf{z}^{\mathrm{iv}} + \mathbf{2q}\mathbf{z}''' + (\mathbf{p}^2 + \mathbf{3h}^2)\mathbf{z}'' + \mathbf{2q}(\mathbf{p} - \mathbf{3h})\mathbf{z}' + [\mathbf{q}^2 + \mathbf{h}(\mathbf{p} - \mathbf{h})^2]\mathbf{z} = \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

ако

$$27\mathbf{q}^2 + 4(\mathbf{p} - 4\mathbf{h})^2(\mathbf{p} - \mathbf{h}) \neq 0, \quad \mathbf{q} \neq 0. \tag{1.7}$$

Доказ. Нека условот (1.7) е исполнет. Диференцирајќи ја функцијата (1.5) двапати

$$\mathbf{z}' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{v}', \tag{1.8}$$

$$\mathbf{z}'' = \mathbf{u}''\mathbf{v} + \mathbf{2}\mathbf{u}'\mathbf{v}' + \mathbf{u}\mathbf{v}'' \tag{1.9}$$

и користејќи ја диференцијалната равенка (1.1) се добива

$$\mathbf{z}'' + \mathbf{h}\mathbf{z} - \mathbf{2}\mathbf{u}'\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{v}''. \tag{1.10}$$

Со диференцирање на (1.10) и соодветна замена на диференцијалните равенки (1.1), (1.3) се добива третиот извод

$$\mathbf{z}''' + (\mathbf{3h} + \mathbf{p})\mathbf{z}' + \mathbf{qz} - (\mathbf{2h} + \mathbf{p})\mathbf{u}'\mathbf{v} = \mathbf{3u}'\mathbf{v}''\,. \tag{1.11}$$

Диференцирајќи ја равенката (1.11) и користејќи ги диференцијалните равенки (1.1), (1.3) и равенката (1.10) се доаѓа до четвртиот извод

$$\mathbf{z}^{\mathrm{iv}} + (\mathbf{6h} + \mathbf{p})\mathbf{z}'' + \mathbf{qz}' + \mathbf{h}(\mathbf{5h} + \mathbf{p})\mathbf{z} + \mathbf{2}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})\mathbf{u}'\mathbf{v}' = -\mathbf{3qu}'\mathbf{v}\,. \tag{1.12}$$

Продолжувајќи со диференцирање на равенка (1.12) и соодветно заменувајќи ја во неа: функцијата (1.5) и равенките (1.10), (1.12) го имаме петиот извод

$$\begin{aligned}&\mathbf{9qz}^{\mathrm{v}} + \mathbf{2}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})\mathbf{z}^{\mathrm{iv}} + \mathbf{15q}(\mathbf{p} + \mathbf{2h})\mathbf{z}'''+\\ &+ [\mathbf{9q}^2 + \mathbf{2}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})(\mathbf{p} + \mathbf{6h})]\mathbf{z}''+\\ &+ \mathbf{q}[\mathbf{81h}^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{8p} + \mathbf{7h})]\mathbf{z}'+\\ &+ [\mathbf{3q}^2(\mathbf{2p} - \mathbf{17h}) + \mathbf{2h}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})(\mathbf{p} + \mathbf{5h})]\mathbf{z} =\\ &= -[\mathbf{27q}^2 + \mathbf{4}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})^2(\mathbf{p} - \mathbf{h})]\mathbf{u}'\mathbf{v}'\,.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Бидејќи условот (1.7) е исполнет, по претпоставка, диференцираме уште еднаш, а имајќи ги предвид равенките (1.1), (1.8), (1.12), (1.13) се добива бараната диференцијална равенка (1.6).

Последица 1. *Ако функциите* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *соодветно се решенија на диференцијалните равенки* (1.1) *и* (1.3), *тогаш функцијата*

$$\mathbf{z} = \mathbf{uv} \tag{1.5}$$

е решение на диференцијалната равенка

$$\begin{aligned}&\mathbf{9qz}^{\mathrm{v}} + \mathbf{2}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})\mathbf{z}^{\mathrm{iv}} + \mathbf{15q}(\mathbf{p} + \mathbf{2h})\mathbf{z}'''+\\ &+ [\mathbf{9q}^2 + \mathbf{2}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})(\mathbf{p} + \mathbf{6h})]\mathbf{z}''+\\ &+ \mathbf{q}[\mathbf{81h}^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{8p} + \mathbf{7h})]\mathbf{z}'+\\ &+ [\mathbf{3q}^2(\mathbf{2p} - \mathbf{17h}) + \mathbf{2h}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})(\mathbf{p} - \mathbf{h})(\mathbf{p} + \mathbf{5h})]\mathbf{z} = \mathbf{0}\,.\end{aligned} \tag{1.14}$$

ако

$$\mathbf{27q}^2 + \mathbf{4}(\mathbf{p} - \mathbf{4h})^2(\mathbf{p} - \mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{0}\,. \tag{1.15}$$

Последица 2. *Во диференцијалната равенка* (1.14) *потребно е* $\mathbf{h} > \mathbf{p}$.

1.2 Теорема 2. *Ако функциите* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *и* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *се линеарно независни партикуларни интеграли соодветно на диференцијалните равенки* (1.1) *и* (1.3) *и ако е исполнет условот* (1.7) *тогаш функциите*

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1,\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2,\ \mathbf{z}_3 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_3,\ \mathbf{z}_4 = \mathbf{u}_2\mathbf{v}_1,\ \mathbf{z}_5 = \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2, \mathbf{z}_6 = \mathbf{u}_2\mathbf{v}_3 \tag{1.17}$$

се линеарно независни партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1.6).

Доказ. Нека $\mathbf{W_1} = \mathbf{W}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ и $\mathbf{W_2} = \mathbf{W}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ се Вронскиеви детерминанти за партикуларните интеграли $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ соодветно.

Вронскиевата детерминанта за системот функции (1.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{W}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6) = \\ &= [27\mathbf{q}^2 + 4(\mathbf{p} - 4\mathbf{h})^2(\mathbf{p} - \mathbf{b})]\mathbf{W}_1{}^3\mathbf{W}_2{}^2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

е различна од нула бидејќи условот (1.7) е исполнет.

Последица 1. *Ако условот* (1.15) *е исполнет тогаш системот функции* (1.17) *е линерано зависен, т.е. функциите* $\mathbf{z}_\mathbf{i}$ $(\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{6}})$ *се линеарно зависни партикуларни интеграли на хомогената линеарна диферцнцијална равенка* (1.13).

2. Определување на контурните услови

2.1. Да го формираме производот од контурните услови (1.2) и (1.4)

$$\begin{aligned} &(\alpha_{\mathbf{i}0}\mathbf{u}_a + \alpha_{\mathbf{i}1}\mathbf{u}'_a)(\gamma_{\mathbf{j}0}\mathbf{v}_a + \gamma_{\mathbf{j}1}\mathbf{v}'_a + \gamma_{\mathbf{j}2}\mathbf{v}''_a) = \\ &= (\beta_{\mathbf{i}0}\mathbf{u}_b + \beta_{\mathbf{i}1}\mathbf{u}'_b)(\delta_{\mathbf{j}0}\mathbf{v}_b + \delta_{\mathbf{j}1}\mathbf{v}'_b + \delta_{\mathbf{j}2}\mathbf{v}''_b) \qquad (\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2};\ \mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Користејќи ги равенствата (1.8), (1.10), (1.12), (1.13) контурните услови за функцијата $\mathbf{z} = \mathbf{uv}$ се од вид

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}_{k0}\mathbf{z}_a + \overline{\alpha}_{\mathbf{k}1}\mathbf{z}'_a + \overline{\alpha}_{\mathbf{k}2}\mathbf{z}''_a + \overline{\alpha}_{\mathbf{k}3}\mathbf{z}'''_a + \overline{\alpha}_{\mathbf{k}4}\mathbf{z}^{\mathbf{iv}}_a + \overline{\alpha}_{\mathbf{k}5}\mathbf{z}^{\mathbf{v}}_a = \\ &= \overline{\beta}_{\mathbf{k}0}\mathbf{z}_b + \overline{\beta}_{\mathbf{k}1}\mathbf{z}'_b + \overline{\beta}_{\mathbf{k}2}\mathbf{z}''_b + \overline{\beta}_{\mathbf{k}3}\mathbf{z}'''_b + \overline{\beta}_{\mathbf{k}4}\mathbf{z}^{\mathbf{iv}}_b + \overline{\beta}_{\mathbf{k}5}\mathbf{z}^{\mathbf{v}}_b \qquad (\mathbf{k} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{6}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

каде:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k0} =&\alpha_{i0}\{\gamma_{j0}[27q^2 + 4(p-4h)^2(p-h)] + q\gamma_{j1}[59ph - 91h^2 - 4p^2]+\\
&+ \gamma_{j2}[3q^2(4p - 25h) + 4h(p-4h)(p-h)(2p+h)]\}+\\
&+ \alpha_{i1}\{q\gamma_{j0}(4p^2 - 59ph + 91h^2)-\\
&- \gamma_{j1}[3q^2(2p - 17h) + 2h(p-4h)(p-h)(p+5h)]+\\
&+ q\gamma_{j2}[9q^2 + h(5p^2 + 41ph - 82h^2)]\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k1} =&2\alpha_{i0}\{\gamma_{j1}[18q^2 - h(p-4h)(5p+7h)]+\\
&+ q\gamma_{j2}[8p^2 - 25ph + 53h^2]\}+\\
&+ \alpha_{i1}\{\gamma_{j0}[2(p-4h)(2p^2 - 5ph + 15h^2) - 9q^2]-\\
&- q\gamma_{j1}(8p^2 - 25ph + 53h^2)+\\
&+ \gamma_{j2}[3q^2(11h + 4p) - 2h(p-4h)(p^2 + 9ph + 2h^2)]\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k2} =&\alpha_{i0}\{3q\gamma_{j1}(p+26h) + \gamma_{j2}[45q^2 + 8(p-4h)(p-h)(p+h)]\}+\\
&+ \alpha_{i1}\{-3q\gamma_{j0}(p+26h) - \gamma_{j1}[9q^2 + 2(p-4h)(p-h)(p+6h)]+\\
&+ q\gamma_{j2}(p+2h)(p+26h)]\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k3} =&10(p+2h)\alpha_{i0}[\gamma_{j1}(4h-p) + 3q\gamma_{j2}]+ \qquad (2.3)\\
&+ \alpha_{i1}\{10\gamma_{j0}(p+2h)(p-4h) - 15q(p+2h)\gamma_{j1}+\\
&+ \gamma_{j2}[9q^2 - 2(p-4h)(p^2 + 10ph + 4h^2)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k4} =&\alpha_{i0}[9q\gamma_{j1} + 4(p-4h)(p-h)\gamma_{j2}]+\\
&+ \alpha_{i1}\{-9q\gamma_{j0} - 2(p-4h)(p-h)\gamma_{j1} + 3q(p+2h)\gamma_{j2}\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{k5} =&6\alpha_{i0}[-(p-4h)\gamma_{j1} + 3q\gamma_{j2}]+\\
&+ \alpha_{i1}\{6(p-4h)\gamma_{j0} - 9q\gamma_{j1} - 2(p-4h)(p+2h)\gamma_{j2}\}\,,
\end{aligned}$$

а коефициентите $\overline{\beta}_{kl}$ $(l = 0, 1, \ldots, 5)$ се добиваат ако α_{ij} и γ_{ij} во коефициентите $\overline{\alpha}_{kl}$ се заменат со β_{ji} и δ_{ij} соодветно.

Забелешка. Во коефициентите $\overline{\alpha}_{\mathbf{kl}}$ и $\overline{\beta}_{\mathbf{kl}}$

кога	$\mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{1}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{1}$;
кога	$\mathbf{i} = \mathbf{2},\ \mathbf{j} = \mathbf{1}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{2}$;
кога	$\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{j} = \mathbf{2}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{3}$;
кога	$\mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{2}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{4}$;
кога	$\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{j} = \mathbf{3}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{5}$;
кога	$\mathbf{i} = \mathbf{2},\ \mathbf{j} = \mathbf{3}$	земаме	$\mathbf{k} = \mathbf{6}$;

2.2. Ако контурните услови (1.2) и (1.4) се Штурмови и се од видот: за контурниот проблем од втор ред

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{10}}\mathbf{u}_a + \alpha_{\mathbf{11}}\mathbf{u}'_a &= 0 \\ \beta_{\mathbf{20}}\mathbf{u}_b + \beta_{\mathbf{21}}\mathbf{u}'_b &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

односно за контурниот проблем од трет ред

$$\begin{aligned} \gamma_{10}\mathbf{v}_a + \gamma_{11}\mathbf{v}'_a + \gamma_{12}\mathbf{v}''_a &= 0 \\ \delta_{20}\mathbf{v}_b + \delta_{21}\mathbf{v}'_b + \delta_{22}\mathbf{v}''_b &= 0 \\ \delta_{30}\mathbf{v}_\mathbf{b} + \delta_{31}\mathbf{v}'_b + \delta_{32}\mathbf{v}''_b &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_{10}\mathbf{v}_a + \gamma_{11}\mathbf{v}'_a + \gamma_{12}\mathbf{v}''_a &= 0 \\ \gamma_{20}\mathbf{v}_a + \gamma_{21}\mathbf{v}'_a + \gamma_{22}\mathbf{v}''_a &= 0 \\ \delta_{30}\mathbf{v}_b + \delta_{31}\mathbf{v}'_b + \delta_{32}\mathbf{v}''_b &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

тогаш лесно се доаѓа до Штурмовите контурни услови за контурните проблеми од шести ред

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k0}}\mathbf{z}_a + \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k1}}\mathbf{z}_a + \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k2}}\mathbf{z}''_a + \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k3}}\mathbf{z}'''_a + \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k4}}\mathbf{z}^{\mathbf{iv}}_a + \overline{\overline{\alpha}}_{\mathbf{k5}}\mathbf{z}^{\mathbf{v}}_a &= 0 \\ \overline{\overline{\beta}}_{l0}\mathbf{z}_b + \overline{\overline{\beta}}_{l1}\mathbf{z}'_b + \overline{\overline{\beta}}_{l2}\mathbf{z}''_b + \overline{\overline{\beta}}_{l3}\mathbf{z}'''_b + \overline{\overline{\beta}}_{l4}\mathbf{z}^{\mathbf{iv}}_b + \overline{\overline{\beta}}_{l5}\mathbf{z}^{\mathbf{v}}_b &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Од контурните услови (2.4) и (2.5.1) се добиваат контурните услови (2.6) каде $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{5}$ и $l = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{7}$; а од контурните услови (2.4) и (2.5.2) се добиваат контурните услови (2.6) каде $\mathbf{k} = 1, 2, \ldots, 7$ и $l = 1, 2, \ldots, 5$.

Од дванаесете контурни услови (2.6) се определуваат $\binom{\mathbf{12}}{\mathbf{6}}$ шесторки од контурни услови кои со диференцијалната равенка (1.6) определуваат $\binom{\mathbf{12}}{\mathbf{6}}$ контурни проблеми од шести ред чие решение е производ од решенијата на контурните проблеми (1.1)-(1.2) и (1.3)-(1.4).

Литература

[1] Georgievska, S. S.: *A boundary problem of the third and fourth orders as a product of boundary problems of the second order*, Matematichki bilten, Skopje, 19(XLV), 53-64, 1995.

[2] Кујумџиева-Николовска, М. Х: *Формирање на линеарни диференцијални равенки чии интеграли се производи од интегралите на линарни диференцијални равенки од втор и трет ред*, Годишен зборник на Електротехнички и Машински факултет на Универзитетот "Кирил и Методиј", Скопје, кн.8-9 (1975-76), 27-33.

A BOUNDARY PROBLEM OF THE SIXTH ORDER AS A PRODUCT OF BOUNDARY PROBLEMS OF THE SECOND AND THE THIRD ORDERS

Slobodanka S. Georgievska

S u m m a r y

Conditions when a boundary problem of sixth and fivth order has as a solution a product of the solutions of boundary problems of the second and the third order in case of general homogeneous boundary conditios have been obtainned in this paper.

University "St. Kiril and Metodij"
Faculty of Civil Engineering
PO Box 560, 1000 Skopje
Republic of Macedonia

e-mail: slobodanka@gf.ukim.edu.mk