O NEKIM KVALITATIVNIM OSOBINAMA REŠENJA JEDNAČINE $\Phi(x, y, y', y'') = 0$

Imer Merovci — Sami Damoni

U ovome radu posmatraćemo jednačinu drugog reda

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

za koju ćemo pretpostaviti da su ispunjeni uslovi egzistencije funkcije u implicitnom obliku, t.j. da se može pisati u obliku

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2}$$

gde je $f(x, u, v)$ neprekidna funkcija svojih argumenata u posmatranoj oblasti D. Time su, prema poznatoj teoremi PEANO, obezbeđeni uslovi egistencije rešenja jednačine (2) kroz bilo koju tačku (x_0, y_0) date oblasti. Drugim rečima, pod gore pomenutim uslovima uvek je moguće rešiti CAUCHY-ev problem, t.j. naći ono rešenje $y = g(x)$ jedpačine (2) koje zadovoljava početne uslove

$$x = x_0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{3}$$

Očito, priroda oblasti egzistencije rešenja jednačine (2) zavisi od pri rode same funkcije f. Stoga, ako se želi obezbediti i jedinstvenost rešenja. jednačine (2), tada mora biti ispunjen, n. pr. LIPSCHITZ-ov uslov po u i v sobzirom na funkciju f. Uslov jedinstvenosti je uvek ispunjen kada su n. pr. parcijalni izvodi f_u' i f_v' ograničeni, t.j. kada postoji pozitivna konstanta K, nezavisna od argumenata x, u i v, takva da važe jednovremeno sledeće dve relacije:

$$\begin{cases} |f_y'(x, y, y')| \leqq K \\ |f'_{y'}(x, y, y')| \leqq K \end{cases} \qquad \text{(u oblasti } D)$$

Važnost jednačine (2) proizlazi i otud što ona obuhvata veliki broj slučajeva kako teoriskog (iz analize i geometrije) tako i praktičnog karaktera (fizika, tehnika itd.). N.pr. kretanje materijalne tačke jedinične mase po apscisnoj osi dato je diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{4}$$

gde je $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ — promenljiva sila koja deluje na pokretnu materijalniu tačku, t — vreme, x — položaj, $\frac{dx}{dt}$ — brzina i $\frac{d^2x}{dt^2}$ — ubrzanje pokretne tačke. Jasno, prilikom rešavanja jednačine (4) treba zadati još dopunske uslove, t.j. *početne uslove*: početni momenat $t = t_0$, početni položaj $x = x_0$, i početnu brzinu $v = v_0$ pokretne tačke.

Među mnogobrojnim istraživanjima posvećenim jednačini (2) zanimljivo je napomenuti rad [1] u kome SEGRE uvodi pojam *eksplozivne* tačke, zatim istražuje uslove egzistencije tačaka (x_0, C) takvih da svako rešenje jednačine (2) ispunjava uslov $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} y(x) = C$ i to kako izolovanih tako i graničnih tačaka datog skupa.

U ovome radu mi ćemo istraživati neke kvalitativne osobine rešenja jednačine (2) pri dovoljno uopštenim pretpostavkama sobzirom na desnu stranu jednačine (2) i to u terminima *diferencijalnih nejednakosti.*

O kvalitativnoj metodi čitalac može pogledati u [2] dok opširno o tome [3] i [4]. Savremeno stanovište o diferencijalnim nejednakostima iz mnogih aspekata pogledati [5].

Za dalje mi ćemo pretpostaviti sledeće:

Neka je ispunjena relacija

$$f(x, y, y') \leqq Cyy' \tag{5}$$

u posmatranoj oblasti D u kojoj je definisana i neprekidna funkcija f, gde je C pozitivna konstanta.

Istraživaćemo globalnu sliku rešenja jednačine (2).

Na osnovu (5) imaćemo diferencijalnu nejednakost

$$y'' \leqq Cyy' \tag{6}$$

koja posle integracije u razmaku $[q_0, x]$, implicira relaciju

$$y' \leqq \frac{C}{2} y^2 + k \tag{7}$$

gde je

$$k = y'(q_0) - \frac{C}{2} y^2(q_0) = y_0' - \frac{C}{2} y_0{}^2 \tag{8}$$

t.j. veličina koja zavisi od početnih uslova

$$\begin{cases} y_0 = y(q_0) \\ y_0' = y'(q_0) \end{cases} \tag{9}$$

Ispitivaćemo sledeće slučajeve:

1°.- k > 0. Tada diferencijalnu nejednakost (7) možemo napisati u obliku

$$\frac{dy}{\frac{C}{2} y^2 + k} \leqq dx,$$

očito, bez narušavanja znaka nejednakosti. Stoga, integracijom poslednje nejednakosti u razmaku $[q_0, x]$ dobijamo

$$\sqrt{\frac{2}{kC}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C}{2k}}\, y \leqq x - q_0 + A, \tag{10}$$

gde je uzeto

$$A = \sqrt{\frac{2}{kC}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C}{2k}}\, y_0.$$

Prema tome relaciju (10) možemo napisati u obliku nejednakosti

$$y \leqq \sqrt{\frac{2k}{C}} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{kC}{2}} (x - q_0 + A) \right] \tag{11}$$

Ako desnu stranu relacije (11) označimo sa $\theta(x)$, ta će funkcija majorizirati svako rešenje $y(x)$ jednačine (2) u dopuštenim intervalima brojne prave počev od tačke čija je apscisa q_0.

2°.- k < 0. Razlikovaćemo sledeće mogućnosti:

a).- Ako je $y(x)$ takvo rešenje jednačine (2) koje ispunjava uslov*

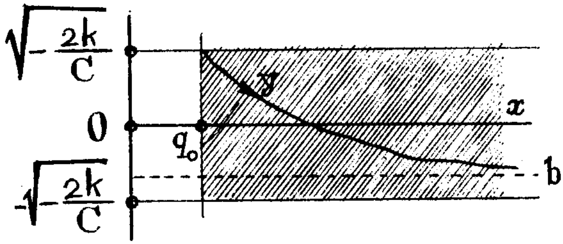
$$\frac{C}{2} y^2 + k \leqq 0,$$

tada je $y' \leqq 0$, t.j. takvo rešenje stalno opada. Stoga, neposredno dobijamo ocenu

$$|y| \leqq \sqrt{-\frac{2k}{C}}$$

* Jasno je da se izraz $(C/2)\, y^2 + k$ može anulirati, eventualno samo u tački $x = q_0$ a fiksirano pozitivno C, što ne menja bitno situaciju.

Dakle, pomenuto rešenje jednačine (2) ne izlazi iz osenčenog pojasa između paralelnih pravih $y = \pm \sqrt{-(2k/C)}$ u (sl. 1). Zaključak je pri tome da takvo rešenje mora težiti asimptotski pravoj $y = b$, kad $x \to \infty$, gde $b \in [-\sqrt{(-2k/C)}, \sqrt{(-2k/C)})$



Sl. 1

b).- Ako pak važi relacija

$$\frac{C}{2} y^2 + k \geqq 0,$$

tada, slično slučaju a), uzećemo da je $y' \geqq 0$, t.j. posmatrano rešenje stalno raste i leži van označenog pojasa iz (sl. 1). Stoga, ako neko rešenje $y(x)$ jednačine (2) u nekoj tački ξ prima negativnu vrednost, t. j. $y(\xi) < 0, \xi \in [q_0, +\infty)$, tada pri $x \to +\infty$, važiće

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = b \leqq -\sqrt{-\frac{2k}{C}}$$

na asimptotski način (monotono rastući).

Međutim, ako je $y(\xi) > 0, \xi \in [q_0, +\infty)$, tada i dalje postojaće granica

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = b,$$

gde u ovom slučaju važi

$$\sqrt{-\frac{2k}{C}} < b \leqq +\infty .$$

Uostalom, u slučaju b) moguće je integrisati nejednakost (7), čime dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{-2kC}} \ln \frac{\sqrt{C}\, y - \sqrt{-2k}}{\sqrt{C}\, y + \sqrt{-2k}} \leqq x - q_0 + A \qquad (12)$$

uz uslov $\sqrt{C}\,|y| > \sqrt{-2k}$, gde je uzeto

$$A = \frac{1}{\sqrt{-2kC}} \ln \frac{\sqrt{C}\,y_0 - \sqrt{-2k}}{\sqrt{C}\,y_0 + \sqrt{-2k}} \qquad (\sqrt{C}\,|y_0| > \sqrt{-2k})$$

Pošto je $y' \geqq 0$,* to rešenja jednačine (2) monotono rastu u intervau $[q_0, +\infty)$. Stoga, kako je $y(\xi) > 0$ odnosno $y(\xi) < 0$ za neku taku $\xi \in [q_0, +\infty)$, to nam nejednakost (12) daje, respektivno

$$y(x) \gtreqless \frac{1+h(x)}{1-h(x)} \sqrt{\frac{-2k}{C}} \quad \text{za } q_0 - A \leq x < +\infty \tag{13}$$

gde je stavljeno

$$h(x) = \exp\left[\sqrt{-2kC}\,(x - q_0 + A)\right] \quad x \in (q_0, +\infty)$$

Uopšte, u slučaju a) možemo dobiti precizniju sliku ponašanja rešenja jednačine (2) na sledeći način: Naime, ima mesta, očito, ocena

$$y' \leqq \frac{C}{2} y^2 + k \leqq \frac{C}{2} y^2,$$

što nam posle integracije u razmaku $[q_0, x]$, neposredno daje ocenu

$$-\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right) \leqq \frac{C}{2}(x - q_0),$$

odnosno

$$y \leqq \frac{1}{\frac{1}{y_0} - \frac{C}{2}(x - q_0)} = \theta(x) \qquad (y_0 \neq 0)$$

---

* Uostalom, kod slučaja 2b predpostavku $y' \geqq 0$ ne moramo uvažiti, ali u tom slučaju relacije (13) nam daju, respektivno, sledeće dve relacije

$$\liminf_{x \to +\infty} y(x) \geqq -\sqrt{-\frac{2k}{C}}$$

odnosno

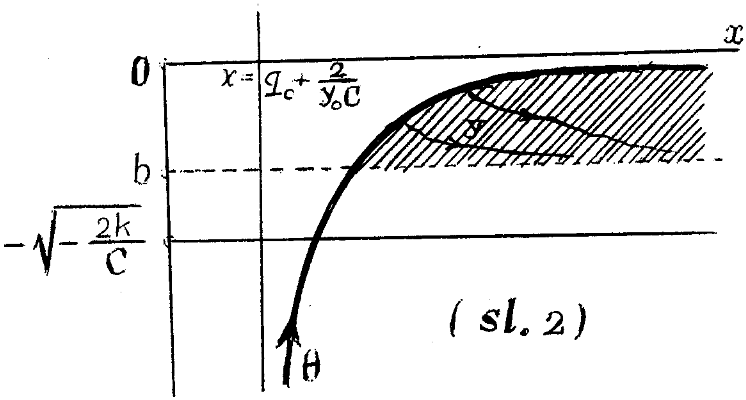
$$\limsup_{a \to +\infty} y(x) \leqq -\sqrt{-\frac{2k}{C}}$$

u zavisnosti od toga da li je $y(x)$ pozitivno ili negativno rešenje jednačine (2).

Desna strana poslednje nejednakosti pretstavlja hiperbolu čija je vertikalna asimptota prava

$$x = q_0 + \frac{2}{y_0 C}$$

i s apscisnom osom kao horizontalnom asimptotom. Na sl. 2 je prikazana situacija dopuštenih rešenja jednačine (2).



(sl. 2)

Naime, uzimajući u obezir još slučaj a) zaključujemo da ma koje od spomenutih rešenja polazi od hiperbole $\theta(x)$ i monotono (opadajući) teži određenoj vrednosti b iz intervala $[-\sqrt{(-2k/C)}, 0)$.

3°.- $k = 0$. U ovome slučaju nejednakost (7) dobija jednostavaniji oblik

$$y' \leqq \frac{C}{2} y^2,$$

i, prema prethodnom slučaju biće

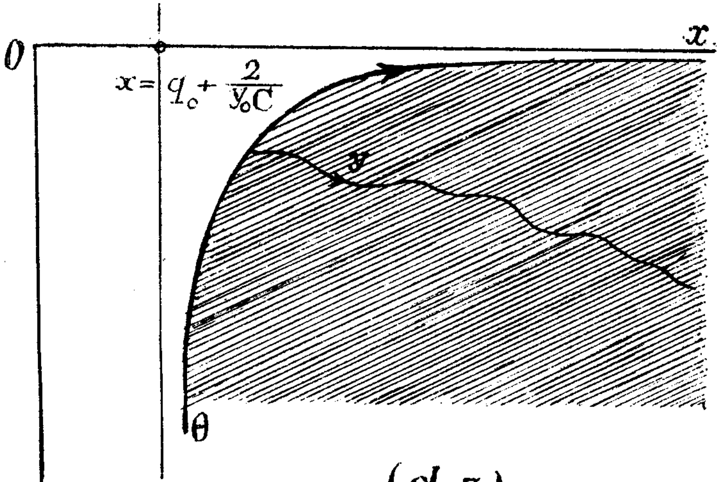
$$y \leqq \frac{1}{\frac{1}{y_0} - \frac{C}{2}(x - q_0)} = \theta(x)$$

Postoji bitna razlika između slučaja (3) i onoga 2°, b). Zaista, kod 2°, b) utvrdili smo monotoni karakter rešenja jednačine (2), međutim, u slučaju 3° znamo jedino da se rešenja nalaze u osenčenoj oblasti koju obuhvata hiperbola $\theta(x)$ (sl. 3).

4°.- Izraz $(C/2)\,y^2 + k$ beskonačan broj puta menja znak u intervalu $[q_0, +\infty)$. U tom slučaju postoji beskonačan niz različitih vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, takvih da važe nejdednakosti

$$\frac{C}{2}\,y^2(x_i) + k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Radi se, dakle, o *oscilatornim* rešenjima jednačine (2).



(sl. 3)

Primećujemo da u svim navedenim slučajevima priroda rešenja strogo zavisi od početnih uslova y_0 i y_0'. Prema tome pod ovim ili onim uslovima sobzirom na funkciju f i početnim uslovima y_0 i y_0' uvek smo u stanju da efektivno govorimo o kvalitativnoj slici rešenja jednačine (2) a da pri tome nije nam poznat eksplicitni oblik bilo kog rešenja pomenute jednačine.

LITERARURA

[1] Segre, B. — Punti esplosivi (radianti o vibranti) delle equazioni del 2° ordine, Ann. mat. pura ed appl., 108 (1976), 97—107.

[2] Еругин, Н. — Книга для чтения по общему курсу дифференциальны уравнений, Минск, 1972.

[3] Nemytskii, V. V. — Stepanov, V. V. — Qualitative theory of differential equations, Princeton, 1960.

Reissig, R. — Sansone, G. — Conti, R.— Qualitative theorie nichtlinearer Differentialgleichungen Edizioni cremonese, Roma, 1963.

[5] Lakshmikantham, V. — LEELA, S. — Differential and Integral inequalities, Vol. I, II. Acad. press, New York and London, 1969.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE L'ÉQUATION $\Phi(x, y, y', y'') = 0$

Imer Merovci et Sami Damoni

Résumé

Dans cet article on traite l'équation différentielle du second ordre sous la forme générale:

(1) $$y'' = f(x, y, y')$$

sous la condition d'éxistence de la solution, c'est à dire la continuité de la fonction f. On impose une condition essentielle complémentaire

(2) $$f(x, y, y') \leqq Cyy'$$

évidement d'une nature géométrique. On trouve des résultats d'une nature qualitative, à l'égard de la restrictivité des solution de (1) à l'égard à (2). On demontre qu'il faut séparer 5 cas nommés 1°—4°, car il est montré que la qualité des solutions depend des conditiones initiales.