Математички Билтен
Книга 2 (XXVIII), 1978, (63—67)
Скопје — Југославија

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И. И. Старун

1. В настоящей работе рассматриватеся система

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

для которой исследуются следующие вопросы:

1) асимптотика решений при $t \to \infty$;
2) устойчивость (в смысле А. М. Ляпунова) решений;
3) интегрируемость в квадратурах.

Отметим, что тот или другой вопрос исследовался рядом авторов [1—5], причем в каждом случае результат зависел от поведения собственных значений матрицы $A(t)$. Однако задача точного определения собственных значений матрицы при большом порядке системы ($n>3$) представляет известную трудность (то же касается и определения собственных векторов матрицы). Предлагаемый нами метод исследования не предполагает знания собственных значений и собстсвенных векторов матрицы $A(t)$.

2. Наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную систему

$$\varepsilon\,\dot{x} = (W(t) + \varepsilon\,A(t) - \varepsilon^k\,W(t))\,x, \tag{2}$$

где ε — параметр (при $\varepsilon = 1$ система (2) тождественна системе (1)), $k \in N$ — любое, а $W(t)$ — диагональная матрица с произвольными, различными при $\forall\, t \in [t_0, \infty[$ диагональными элементами $w_i(t)$, $i=\overline{1, n}$. Относительно матриц $A(t)$, $W(t)$ предположим: $A(t)$, $W(t) \in \overset{m}{C}[t_0, \infty[$, $m \in N$. К системе (2) применим преобразование

$$x = Q_m(t, \varepsilon)\,y = \left(E + \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s\,Q^{(s)}(t)\right) y, \tag{3}$$

получим систему

$$\varepsilon\,Q_m(t, \varepsilon)\;\dot{y} = ((W(t) + \varepsilon\,A(t) - \varepsilon^k\,W(t))\,Q_m(t, \varepsilon) - \varepsilon\,\dot{Q}_m(t, \varepsilon))\,y. \tag{4}$$

Определим матрицу $Q_m(t,\varepsilon)$ исходя из равенства

$$(W(t)+\varepsilon A(t)-\varepsilon^k W(t))\, Q_m(t,\varepsilon)-\varepsilon\,\dot{Q}_m(t,\varepsilon)= \\ = Q_m(t,\varepsilon)\,(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1} C_m(t,\varepsilon)), \tag{5}$$

в котором $\Lambda_m(t,\varepsilon)$ — диагональная матрица вида

$$\Lambda_m(t,\varepsilon)=W(t)+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s\Lambda^{(s)}(t),\ \Lambda^{(s)}(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_1^{(s)}(t),\dots,\lambda_n^{(s)}(t)\}, \tag{6}$$

а $C_m(t,\varepsilon)$ — $n\times n$ матрица, подлежащая, как и $\Lambda_m(t,\varepsilon)$, определению. Метод определения матриц $Q_m(t,\varepsilon)$, $\Lambda_m(t,\varepsilon)$, $C_m(t,\varepsilon)$ следующий. Приравняем в (5) коэффициенты при ε^s, $s=0,1,\dots,m$, придем к следующей системе матричных уравнений

$$WQ^{(1)}-Q^{(1)}W=\Lambda^{(1)}-A, \tag{7_1}$$

$$WQ^{(s)}-Q^{(s)}W=\Lambda^{(s)}-F^{(s)},\quad s=\overline{2,m} \tag{7_s}$$

где

$$F^{(s)}=AQ^{(s-1)}+\dot{Q}^{(s-1)}-WQ^{(s-k)}-\sum_{i=1}^{s-1}Q^{(i)}\Lambda^{(s-i)}. \tag{8}$$

($Q^{(s-k)}\equiv O$ при $s<k$. Здесь мы аргументы функций опустили). Из (7) находим

$$\Lambda^{(1)}(t)=\operatorname{diag}\{a_{11}(t),\dots,a_{nn}(t)\}, \tag{9}$$

$$q_{ij}^{(1)}(t)=\frac{a_{ij}(t)}{w_j(t)-w_i(t)},\ i,j=\overline{1,n},\quad i\neq j. \tag{10}$$

Елементы $q_{ii}^{(1)}(t)$ остаются произвольными, положим их равными нулю. Таким образом, матрицы $\Lambda^{(1)}(t)$, $Q^{(1)}(t)$ определены. Аналогично из (7_s) находим

$$\Lambda^{(s)}(t)=\operatorname{diag}\{f_{11}^{(s)}(t),\dots,f_{nn}^{(s)}(t)\}, \tag{11}$$

$$q_{ij}^{(s)}(t)=\frac{f_{ij}^{(s)}(t)}{w_j(t)-w_i(t)},\quad i,j=\overline{1,n},\quad i\neq j. \tag{12}$$

Кроме того полагаем

$$q_{ii}^{(s)}(t)=O,\quad i=\overline{1,n},\quad s=\overline{1,m-1}. \tag{13}$$

Елементы $q_{ii}^{m}(t)$ оставим пока неопределенными, их мы используем в дальнейшем. Етим самым матрицы $\Lambda_m(t, \varepsilon)$, $Q_m(t, \varepsilon)$ определены. Предположим, что при $\varepsilon = 1$ матрица $Q_m(t, \varepsilon)$ неособенная, т.е.

$$\det Q_m(t, 1) \neq O, \ \forall t \in [t_0, \infty]. \tag{14}$$

Условию (14) всегда можно удовлетворить используя произвольность єлементов $q_{ii}^{(m)}(t)$ матрицы $Q^{(m)}(t)$, что мы и предполагаем. Тогда из (5) определелим матрицу $C_m(t, \varepsilon)$ (при $\varepsilon = 1$)

$$C_m(t, 1) = Q_m^{-1}(t, 1)\,(A(t)\,Q^{(m)}(t) - Q^{(m)}(t) - W(t)\sum_{i=m-k+1}^{m} Q^{(i)}(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m} Q^{(j)}(t)\,\Lambda^{(m-j+i)}(t)). \tag{15}$$

Согласно сделанных предположений относителгно матриць $W(t)$, $A(t)$ из (15) следует непрерывность мартицы $C_m(t, 1)$. Тогда система (4), на основании (5), приводится к виду

$$\dot{y} = (\Lambda_m(t, 1) + C_m(t, 1))\,y. \tag{16}$$

3. Исходя из (16) и используя известные результаты, делаем следующеи выводы.

Теорема 1. Если єлементы матрицы $\Lambda_m(t, 1) = \operatorname{diag}\{\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)\}$ таковы, что ни одна из разностей $\operatorname{Re}(\omega_i(t) - \omega_j(t))$, $i, j = \overline{1, n}$ не меняет знак при $i \neq j$, $t \geqslant t_0$, а матрица $C_m(t, 1)$ такова, что $\int_{t_0}^{\infty} \| C_m(t, 1) \|\, dt < \infty$, то фундаментальная матрица системы (1) представима в виде

$$X(t) = Q_m(t, 1)\,(E + \Omega(t))\,exp\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda_m(\tau, 1)\, d\tau\right), \tag{17}$$

где $\Omega(t)$ — непрерывная $n \times n$ матрица, причем $\Omega(t) \to O$ при $t \to \infty$. Доказательство см [1, 6].

Введем обозначения

$$\rho_m(t) = \max_{i, j = \overline{1, n}} | q_{ijm}(t) |, \quad u_m(t) = \max_{i = \overline{1, n}} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\omega_i(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

$$(Q_m(t, 1) = (q_{ijm}(t))_1^n).$$

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1 и условие

$$\rho_m(t) \exp u_m(t) < \infty, \quad \forall t \in [t_0, \infty[, \tag{19}$$

то система (1) устойчива, елси же вместо (19) выполняется условие

$$\rho_m(t)\exp u_m(t)\to O,\ t\to\infty, \tag{20}$$

то система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство этой теоремы, исходя из (17), следует из [6] Так для уравнения $\ddot{x}+a_2(t)\dot{x}+a_1(t)x=o$ одним из условий устойчивости есть выполнение следующих неравенств

а) $a_1(t)<\infty,\ \forall t\in[t_0,\infty[$;

$$\text{б)}\ \int\limits_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\dot{a}_1(t)+2a_1(t)a_2(t)}{4a_1(t)}\right|dt<\infty, \tag{21}$$

которые выполняются, например, при $a_1(t)=\text{const},\ a_2(t)=O(1/t^2)$.

4. Указанный метод приведения системы (1) к виду (16) позволяет решать еще один вопрос — вопрос об интегрируемости линейных уравнений в квадратурах. Заметим, что вопрос интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах является важным для практических приложений и был предметом исследований большого числа математиков. Ряд важных результатов в єтом направлении получены, в частности, Д. Митриновичем и его учениками (см., например, приложение в [7]).

Суть нашего метода исходит из того, что если матрица системы является треугольной, то такая система интегрируется в квадратурах. Поєтому, приравняв нулю єлемены матрицы $C_m(t,1)$ (при каждом $m=1,2,\dots$ отдельно), лежащие под(или над) главной диагональю, получаем условия интегрируемости системы (16), а, следовательно, и системы (1), в квадратурах. Отыскание же общего решения такой системы не представляет трудностей. Так при $m=1,2;k=1$ и различном выборе $w_1(t)$, $w_2(t)$(которые вообще говоря, произвольны (см. п. 1)) для указанного выше уравнения второго порядка можно получить, например, следуюшие условия интегриуемости в квадратурах

$$a_1(t)+a_2(t)+1=0, \tag{22}$$

$$a_1(t)=-\exp\left(\int a_2(t)\,dt\right), \tag{23}$$

$$a_2(t)=\int a_1(t)\,dt, \tag{24}$$

$$\dot{a}_1(t)+2a_1(t)a_2(t)=0, \tag{25}$$

$$a_1^2(t) + a_1(t)\,\dot a_2(t) - a_2(t)\,\ddot a_1(t) = 0, \tag{26}$$

$$\dot a_1(t) - a_1(t)\,a_2(t) + a^3{}_1(t) + 1 = 0, \tag{27}$$

$$4\,a_1^2(t)\,a_2^2(t) - 5\,(\dot a_1(t))^2 + 4\,a_1(t)\,\ddot a_2(t) + 8\,a_1^2(t)\,\dot a_2(t) = 0. \tag{28}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Рапопорт: О некоторых асимптотических методах в теории дифференицльных уравнений. Изд-во АН УССР, Киев, 1954.
2. Е. А. Коддингтон, Н. Левинсон: Теория обыкновенных дифференциальных урав- нений. ИЛ, Москва, 1958.
3. М. і. Шкіль: Асимптотичні методи в диференціалниних рівняннях. „Вища школа", Киев, 1971.
4. И. И. Старун: Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений. Канд. дис., Киев, 1969.
5. И. И. Старун: Укр. матем. ж., т. 26, вып. 5, 1974.
6. Б. П. Демидович: Лекции по математической теории устойчивости. „Наука", Москва, 1967.
7. Е. Камке: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. „Наука" Москва, 1971.