Математички Билтен
Книга 2 (XXVIII), 1978, (29—36)
Скопје — Југославија

ЗА ЕДНА КЛАСА ПОЛУГРУПИ

Смиле Марковски

Во работава се дефинираат многукратностите $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{O}_k$ од k-левонулти и k-нулти полугрупи, и се покажува дека класата n-полугрупи коишто се n-потполугрупи од k-левонулти (односно k-нулти) полугрупи формираат многукратност $\mathcal{L}_k(n)$ (односно $\mathcal{O}_k(n)$). За таа цел се наоѓаат комплетните системи идентитети во соодветните многукратности и се опишуваат подетално слободните структури во нив.

0. Основни дефиниции. За една полугрупа S велиме дека е k-левонулта акко S го задоволува идентитетот

$$x_0 x_1 \ldots x_k = x_0 x_1 \ldots x_k y, \tag{0.1}$$

k-деснонулта акко S го задоволува идентитетот

$$y x_0 x_1 \ldots x_k = x_0 x_1 \ldots x_k, \tag{0.2}$$

и k-нулта акко ги задоволува обата идентитета (0.1) и (0.2).

За n-полугрупата $A\,[\ldots]$ (каде со $[\ldots]$ ја означуваме $n+1$-арната операција во A) велиме дека е n-потполугрупа од полугрупата S акко $A \subseteq S$ и

$$[a_0 a_1 \ldots a\ ] = a_0 a_1 \ldots a_n \tag{0.3}$$

за секои $a_0, \ldots, a_n \in A$. Веднаш да одбележиме дека, користејќи го општиот асоцијативен закон за n-полугрупите, равенството (0.3) може да се искаже и во поопшт облик, т.е. со

$$[a_0 a_1 \ldots a_{rn}] = a_0 a_1 \ldots a_{rn} \quad (r \geqslant 0). \tag{0.4}$$

Многукратноста k-левонулти полугрупи ќе ја означуваме со $\mathcal{L}_k$, а многукратноста k-нулти полугрупи со $\mathcal{O}_k$. Бидејќи, од причини на симетрија, тврдењата искажани во оваа работа за k-левонултите полугрупи важат и за k-деснонултите полугрупи (се разбира, соодветно изменети) многукратноста k-деснонулти полугрупи нема да ја разгледуваме специјално.

1. Комплетни системи идентитети. Описот на сите идентитети во многукратноста k-левонулти полугрупи $\mathcal{L}_k$ го дава следнава теорема:

Теорема 1.1. Равенството

$$x_0 x_1 \ldots x_n = y_0 y_1 \ldots y_m \tag{1.1}$$

е идентитет во $\mathcal{L}_k$ акко е исполнет некој од следниве услови:

(i) $n = m < k$ и $x_j = y_j$ за $j = 0, 1, \ldots, n$.

(ii) $n \geqslant k$, $m \geqslant k$ и $x_j = y_j$ за $j = 0, 1, \ldots, k$.

Доказ: Нека $n < k$. Тогаш врз производот $x_0 x_1 \ldots x_n$ не може да се „примени" идентитетот (0.1), бидејќи и левата и десната страна на (0.1) имаат должина не помала од $k + 1$. Затоа во овој случај (1.1) е идентитет во $\mathcal{L}_k$ акко важи условот (i).

Уочуваме дека врз низата $x_0 x_1 \ldots x_k$ можеме произволно многу пати да го применуваме (0.1). При секоја таква примена добиваме низа од облик $x_0 \ldots x_k y_1 \ldots y_r$, за $r \geqslant 0$. Притоа, јасно е дека $x_0 \ldots x_k = x_0 \ldots x_k y_1 \ldots y_r$ е идентитет во $\mathcal{L}_k$, од каде следува дека $x_0 \ldots x_k y_1 \ldots y_r = x_0 \ldots x_k z_1 \ldots z_s$ $(r \geqslant 0,\ s \geqslant 0)$ е исто така идентитет во $\mathcal{L}_k$.

На крај, ако $n \geqslant k$ тогаш со примената на (0.1) врз $x_0 \ldots x_n$ заклучуваме дека добиваме производи чија должина не е помала од $k+1$, а првите $k + 1$ члена во тие производи се $x_0, \ldots, x_k$. ∎

Со наредната теорема ќе го дадеме описот на сите идентитети во многукратноста $\mathcal{O}_k$.

Теорема 1.2. Равенството

$$x_0 x_1 \ldots x_n = y_0 y_1 \ldots y_m$$

е идентитет во многукратноста $\mathcal{O}_k$ акко важи некој од следниве услови:

(i) $n = m < k$ и $x_j = y_j$ за $j = 0, 1, \ldots, n$.

(ii) $n \geqslant k$, $m \geqslant k$.

Доказ: Ако $n < k$ тогаш врз производот $x_0 \ldots x_n$ не може да се примени ниеден од законите (0.1) и (0.2).

Ако $n \geqslant k$ тогаш имаме

$$x_0 \ldots x_k \ldots x_n = x_0 \ldots x_k = x_0 \ldots x_k y_0 \ldots y_k = y_0 \ldots y_k = y_0 \ldots y_k \ldots y_m.$$

за секој $m \geqslant k$. ∎

2. Слободни k-левонулти и k-нулти полугрупи. Ако A $(\neq \emptyset)$ е дадено множество со $A^r = \{a_1 a_2 \dots a_r \mid a_j \in A\}$ го означуваме множеството од сите низи во A со r члена, т.е. множеството од сите низи со должина r во A. Според Т. 1.1 слободната k-левонулта полугрупа L_A генерирана над множеството A е

$$L_A = A \cup A^2 \cup \dots \cup A^k \cup A^{k+1},$$

при што произзодот во L_A е определен со

$$(a_0 a_1 \dots a_r)(a_{r+1} \dots a_s) = \begin{cases} a_0 a_1 \dots a_s, & \text{кога } s < k \\ a_0 a_1 \dots a_k, & \text{кога } s \geqslant k. \end{cases}$$

Секоја k-нулта полугрупа е полугрупа со нула, па затоа слободната k-нулта полугрупа O_A генерирана над множеството A, според Т. 1. 2, е

$$O_A = A \cup A^2 \cup \dots \cup A^k \cup \{o\},$$

каде o е нулата во O_A. Притоа, операцијата во O_A е определена со

$$(a_0 a_1 \dots a_r)(a_{r+1} \dots a_s) = \begin{cases} a_0 a_1 \dots a_s, & \text{кога } s < k \\ o, & \text{кога } s \geqslant k. \end{cases}$$

Елементите во L_A и O_A, коишто претставуваат низи во A со должина не поголема од k, ги викаме иредуцибилни. Од друга страна, ако $u \in A^{k+1} \subseteq L_A$ тогаш $u = uv$ за секој $v \in L_A$, односно секој од елементите $u \in A^{k+1}$ е лева нула во L_A. Левите нули во L_A ги викаме редуцибилни елементи во L_A.

Од горните разгледувања следува точноста на следнава особина.

Теорема 2.1. Ако $|A| = n$ тогаш $|L_A| = \sum_{i=1}^{k+1} n^i$, $|O_A| = 1 + \sum_{i=1}^{k} n^i$, каде со $|A|$, $|L_A|$ и $|O_A|$ е означен кардиналниот број на соодветните множества. ∎

3. n-потполугрупи од k-левонулти полугрупи. Ако $A[\dots]$ е n-потполугрупа од k-левонулта полугрупа S, тогаш, како последица од Т. 1.1 (ii) и (0.4), добиваме дека за секои $a_0, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{sn-k}, c_1, \dots$ $\dots, c_{tn-k} \in A$ важи равенството

$$[a_0 \dots a_k b_1 \dots b_{sn-k}] = [a_0 \dots a_k c_1 \dots c_{tn-k}],$$

кога $sn \geqslant k$, $tn \geqslant k$. Според тоа важи

Лема 3.1. Во секоја n-потполугрупа од k-левонулта полугрупа се точни идентитетите

$$[x_0 \dots x_k\, y_1 \dots y_{sn-k}] = [x_0 \dots x_k\, z_1 \dots z_{tn-k}], \tag{3.1}$$

за $sn \geqslant k$, $tn \geqslant k$. ∎

Многукратноста n-полугрупи, определена со (3.1), ќе ја означуваме со $\mathcal{L}_k(n)$, а со $\mathcal{K}$ ќе ја означиме класата n-полугрупи коишто се n-потпулугрупи од k-левонултите полугрупи. Очигледно $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}_k(n)$. Ќе докажеме дека $\mathcal{K} = \mathcal{L}_k(n)$, т.е. дека класата $\mathcal{K}$ е многукратност.

Ќе се договориме, за понатаму, елементите од една фиксна n-полугрупа $A[\dots]$ да ги означуваме со a, b, c, d, со индекси или без нив. Затоа, ако, на пример, во некој израз стои a_m, ќе сметаме дека $a_m \in A$. Исто така, место n-полугрупа $A[\dots]$, за пократко ќе велиме само n-полугрупа A. Овој договор ќе важи и во наредниот параграф.

Нека $A \in \mathcal{L}_k(n)$. Со L_A, како и погоре, ќе ја означуваме слободната k-левонулта полугрупа генерирана над множеството A. Елементите на полугрупата L_A ќе ги означуваме со u, v, со индекси или без нив. Во L_A дефинираме релација $\vdash$ со:

$$uav \vdash ua_0 \dots a_{mn}\, v \Leftrightarrow [a_0 \dots a_{mn}] = a \text{ во } A,$$

каде $u, v \in L_A$.

Транзитивниот производ на релациите $\vdash$ и $\dashv = \vdash^{-1}$ ќе го означуваме со $\vdash\!\dashv$.

Лема 3.2. Релацијата $\vdash\!\dashv$ е конгруенција во полугрупата L_A. ∎

Ќе покажеме дека релацијата $\vdash\!\dashv$ ги раздвојува елементите од A, односно ако $a, b \in A$ и $a \vdash\!\dashv b$ тогаш $a = b$. Затоа нека $a, b \in A$ и $a \vdash\!\dashv b$, т.е.

$$a \,\square\, u_1 \,\square\, u_2 \,\square\, \dots \,\square\, u_r \,\square\, b, \tag{3.2}$$

каде на местото на $\square$ може да дојде кој било од симболите $\vdash$ или $\dashv$.

Претходно ќе се користиме со следниве ознаки и договори. Нека $f \in A$ е фиксен елемент. Ако $u \in L_A$ е елемент со должина $s+1$, со $u' = uf^r$ го означуваме елементот $u' \in A^{s+r+1}$ каде $r \geqslant 0$ е најмалиот цел број таков што $s + r \equiv 0 \pmod n$. Потоа, на секој елемент $u \in L_A$ му придружуваме еднозначно определен елемент $[u] \in A$, ставајќи

$$[u] = [u'] = [a_0 \dots a_s f^r],$$

каде $u = a_0 \dots a_s$. Одбележуваме дека за $a \in A$ имаме $[a] = a$.

Лема 3.3. Нека $\square$ е кој било од знаците $\vdash$ или $\dashv$, а $u, v \in L_A$. Ако $u \,\square\, v$ тогаш $[u] = [v]$.

Доказ: Нека $u \vdash v$, т.е. $u = a_0 a_1 \dots a_s$, $a_i = b_0 \dots b_{jn}$, $v = a_0 \dots a_{i-1} b_0 \dots b_{jn} a_{j+1} \dots a_s$.

1) Ако v е иредуцибилен тогаш

$$[u] = [a_0 \ldots a_s f^r] = [a_0 \ldots a_{i-1} b_0 \ldots b_{jn} a_{i+1} \ldots a_s f^r] = [v].$$

2) Ако u е иредуцибилен, а v е редуцибилен, тогаш имаме:

(i) $v = a_0 \ldots a_{i-1} b_0 \ldots b_{k-i}$ кога $k - i \leqslant jn$, па користејќи го (3.1) се добива дека важат равенствата

$$[u] = [a_0 \ldots a_s f^r] = [a_0 \ldots a_{i-1} [b_0 \ldots b_{jn}] a_{i+2} \ldots a_s f^r] =$$

$$= [a_0 \ldots a_{i-1} b_0 \ldots b_{jn} a_{i+1} \ldots a_s f^r] = [a_0 \ldots a_{i-1} b_0 \ldots b_{k-i} f^p] = [v],$$

каде $p \geqslant 0$ е најмалиот цел број таков што $p + k \equiv 0 \pmod n$.

(ii) $v = a_0 \ldots a_{i-1} b_0 \ldots b_{jn} a_{i+1} \ldots a_{k-jn}$ кога $k - i > jn$, па повторно со користење на (3.1) добиваме $[u] = [v]$.

3) Ако u е редуцибилен тогаш и v е редуцибилен, па слично како под 2) ќе добиеме $[u] = [v]$. ■

Теорема 3.4. $\mathcal{K} = \mathcal{L}_k(n)$, т.е. класата n-потполугрупи од k-левонулти полугрупи е многукратност.

Доказ: Според Л. 3.3, од низата (3.2) имаме

$$[a] = [u_1] = [u_2] = \ldots = [u_r] = [b],$$

а бидејќи $[a] = a$ и $[b] = b$, добиваме $a = b$, што и требаше да докажеме. ■

4.4. n-потполугрупи од k-нулти полугрупи. Најнапред да истакнеме дека при $k = 0$ од (0.1) и (0.2) следува дека $x = y$ е идентитет во $\mathcal{O}_0$, па оваа многукратност е тривијална во овој случај. Затоа ќе земеме дека $k > 0$.

Ќе покажеме дека класата $\mathcal{K}$ од n-полугрупи, коишто се n-потполугрупи од k-нулти полугрупи, се совпаѓа со многукратноста n-полугрупи $O_k(n)$, определена со фамилијата идентитети

$$[x_0 \ldots x_{sn}] = [y_0 \ldots y_{rn}], \tag{4.1}$$

кога $sn \geqslant k$, $rn \geqslant k$.

Дека секоја n-потполугрупа од k-нулта полугрупа припаѓа на $\mathcal{O}_k(n)$ следува од Т. 1.2 (ii). Затоа земаме дека $A[\ldots]$ е n-полугрупа во којашто се исполнети идентитетите (4.1), т.е. $A \in \mathcal{O}_k(n)$.

Ако $k \leqslant n$ тогаш A е нулта n-полугрупа, односно $[a_0 \ldots a_n] = e$ за секои $a_0, \ldots, a_n \in A$, каде е e некој фиксен елемент од A. Ставајќи $a * b = e$ за секои $a, b \in A$, добиваме k-нулта полугрупа $A(*)$, таква што $A[\ldots]$ е n-потполугрупа од $A(*)$, бидејќи за секои $a_0, \ldots, a_n \in A$,

$$[a_0 \ldots a_n] = a_0 * a_1 * \ldots * a_n = e.$$

Сега нека $n < k$, $A[\dots] \in \mathcal{O}_k(n)$ и O_A е слободната k-нулта полугрупа генерирана од A. Во O_A дефинираме релација $\vdash$ и релација $\dashv\vdash$ на ист начин како и во § 3, при што повторно $\dashv\vdash$ ќе биде конгруенција во O_A. Ќе покажеме дека од $a, b \in A$ и $a \dashv\vdash b$ следува $a=b$, од каде ќе следува дека $\mathcal{K}=\mathcal{O}_k(n)$ и во овој случај. За таа цел нека $a, b \in A$ и нека $a \dashv\vdash b$, па затоа разгледуваме низа од ист облик како и (3.2).

Лема 4.1. $a \vdash u \Leftrightarrow a = [a_0 \dots a_{sn}]$, $u = a_0 \dots a_{sn}$.

Доказ: Бидејќи $k > 0$, елементите $a \in A$ се иредуцибилни во O_A па затоа $a \vdash u$ акко $a = [a_0 \dots a_{sn}]$ во A, $u = a_0 \dots a_{sn}$ во O_A. ∎

Лема 4.2. $u \vdash a \Leftrightarrow u = a$. ∎

Лема 4.3. Ако u не е нулата во O_A тогаш $a \vdash u \vdash v \Rightarrow a \vdash v$.

Доказ: Според Л. 4.1 имаме $a = [a_0 \dots a_{sn}]$, $u = a_0 \dots a_{sn}$. Бидејќи u не е нулата во O_A, u е иредуцибилен, па затоа $v = a_0 a_1 \dots a_{i-1} b_0 \dots \dots b_{jn} a_{i+1} \dots a_{sn}$, каде $a_i = [b_0 \dots b_{sn}]$. Оттука имаме $a = [a_0 \dots a_{i-1} b_0 \dots b_{jn} a_{i+1} \dots a_{sn}]$, односно $a \vdash v$. ∎

Лема 4.4. Ако u не е нулата во O_A тогаш $a \vdash u \dashv v \Rightarrow a \vdash v$. ∎

Лема 4.5. Ако o е нулата во O_A тогаш $a \vdash o$ акко $a = e$ е нулата во $A[\dots]$.

Доказ: Нека $a \vdash o$. Тогаш $a = [a_0 \dots a_{sn}]$, $o = a_0 \dots a_{sn}$, според Л. 4.1; притоа имаме и $sn \geqslant k$. Според (4.1), ако $tn \geqslant k$, тогаш за секои $a_0, \dots, a_{sn}, b_0, \dots, b_{tn} \in A$ имаме $[a_0 \dots a_{sn}] = [b_0 \dots b_{tn}]$. Затоа, земајќи e да е некој фиксен елемент од A и ставајќи $[b_0 \dots b_{tn}] = e$, добиваме дека e е нула во A. Притоа, јасно е дека $a = e$. ∎

Како последица од горните леми ја добиваме.

Теорема 4.6. $\mathcal{K} = \mathcal{O}_k(n)$, т.е. класата n-потполугрупи од k-нулти полугрупи е многукратност.

Доказ: Како што рековме, доволно е да докажеме дека конгруенцијата $\dashv\vdash$ ги раздвојува елементите од A. Ако во низата (3.2) некој од елементите u_i е нулата во O_A, тогаш (3.2), според Л. 4.1 — Л. 4.4, може да се напише во овој облик:

$$a \vdash o \,\square\, u_j \,\square \dots \square\, u_m \,\square\, o \dashv b$$

од каде, според Л. 4.5 добиваме $a=e=b$ е нулата во A. Во спротивниот случај од Л.4.1, Л.4.3 и Л.4.4 следува $a \vdash b$, од каде, според Л.4.2 имаме $a = b$. ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ. Чупона и С. Марковски, Сместувања на универзални алгебри, Год. Зб. на ПМФ 25—26 (1975/76), Скопје.

[2] M. Prešić, S. Prešić, On the embedding of Ω-algebras in groupoids, Publ. de l'Ins. Mat. 21 (35), 1977, Београд.

[3] G. Čupona, n-subsemigroups of periodic semigroups, Год. зб. на Мат. фак., 29 (1978), Скопје.

ON A CLASS OF SEMIGROUPS

S. Markovski

(Summary)

An algebra $A[\ldots]$ with an associative $(n+1)$-ary operation is said to be an n-semigroup. $A[\ldots]$ is an n-subsemigroup of a semigroup S if $A \subseteq S$ and $[a_0 a_1 \ldots a_n] = a_0 a_1 \ldots a_n$ for all $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$. If $\mathcal{C}$ is a class of semigroups then by $\mathcal{C}(n)$ is denoted the class of n-semigroups which are n-subsemigroups in semigroups belonging to $\mathcal{C}$.

Let $\mathcal{L}_k$ $(\mathcal{R}_k)$ be the variety of semigroups S such that all elements of S^{k+1} are left (right) zeros and let $\mathcal{O}_n = \mathcal{L}_k \cap \mathcal{R}_k$. Convenient descriptions of the classes $\mathcal{L}_k(n)$ and $\mathcal{O}_k(n)$ are given in this paper.

First we describe the complete systems of identities in $\mathcal{L}_k$ and $\mathcal{O}_k$.

1. $x_0 x_1 \ldots x_r = y_0 y_1 \ldots y_s$ is a nontrivial identity equation in $\mathcal{L}_k$ iff $r, s \geqslant k$ and $x_j = y_j$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, k$.

2. $x_0 x_1 \ldots x_r = y_0 y_1 \ldots y_s$ is a nontrivial identity in $\mathcal{O}_k$ iff $r, s \geqslant k$.

3. If $A[\ldots]$ is an n-semigroup then $A[\ldots] \in \mathcal{L}_k(n)$ iff the following identity equation is satisfied in $A[\ldots]$:

$$(1) \qquad [x_0 x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{pn-k}] = [x_0 x_1 \ldots x_k z_1 \ldots z_{qn-k}]$$

for every integers p, q, such that $pn \geqslant k$, $qn \geqslant k$.

Proof. Let $A[\ldots]$ satisfy all the identities (1), and let L_A be the semigroup in $\mathcal{L}_k$ which is freely generated by A. By **1** we have that $L_A = A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{k+1}$, where all elements of A^{k+1} are left zeros in L_A.

Let τ be the least congruence on L_A such that

$$a = [a_0 a_1 \ldots a_n] \text{ in } A[\ldots] \Rightarrow a \,\tau\, a_0 a_1 \ldots a_n \text{ in } L_A.$$

It can be shown that (1) implies the following statement:

$$a, b \in A,\ a \,\tau\, b \Rightarrow a = b,$$

and therefore we can assume that $A[\ldots]$ is an n-subsemigroup of $S = L_A/\tau$.

3*

4. If $A\,[\ldots]$ is an n-semigroup then $A\,[\ldots] \in \mathcal{O}_k(n)$ iff $A\,[\ldots]$ is an n-semigroup with a zero z and $[x_0\,x_1 \ldots x_{rn}] = z$ for each r such that $rn \geqslant k$.

Proof. Let $A\,[\ldots]$ satisy the mentioned condition, and let O_A be a semigroup in $\mathcal{O}_k$ freely generated by A. It follows from 2 that $O_A = A \cup A^2 \cup \ldots \ldots \cup A^k \cup o$, where $o \notin A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^k$ and o is the zero of O_A.

Defining τ as in the proof of **3**, we get a semigroup $S = O_A/\tau \in \mathcal{O}_k$, and $A\,[\ldots]$ can be embedded as an n-subsemigroup in S.