ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Петар Р. Лазов

1. Пусть даётся дифференциальное уравнение

$$(D) \qquad A(x)\,y' = \sum_{k=0}^{n} B_{\nu_k}(x)\,y^{\nu_k}, \quad \nu_n > \nu_{n-1} > \cdots > \nu_0 \geqslant 0, \ \nu_n \geqslant 2,$$

где $A(x)$, $B_{\nu_k}(x)$ $(k=\overline{o,n})$-полиномы степени a, соответственно b_{ν_k}. Обозначим через α, соответственно β_{ν_k} коэффициенты членов с степенью a, соответсвенно b_{ν_k}.

Предпложим что уравнение (D) имеет решение вида

$$(E) \qquad x = F_r(t) = \sum_{k=0}^{r} d_k x^k, \ y = \Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k; \ r, m = 1, 2, 3, \ldots$$

Учитывая, что $y' = \dot{y}/\dot{x}$, уравнение (D) принимает следующий вид

$$(1) \qquad m\,\alpha\, c_m\, d_r^{a}\, t^{ra+m-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \left\{ r\beta_{\nu_k} c_m^{\nu_k} d_r^{1+b_{\nu_k}}\, t^{rb_{\nu_k}+m\nu_k+r-1} + \cdots \right\}$$

В уравнении (1), члены

$$m\,\alpha\, c_m\, d_r^{a}\, t^{ra+m-1}, \ r\beta_{\nu_k} c_m^{\nu_k} d_r^{1+b_{\nu_k}}\ t^{rb_{\nu_k}+r-1+m\nu_k} \quad (k=\overline{o,n}).$$

будем называть главными членами. Чтобы решение вида (E) существовало, необходимо чтобы по крайней мере два главных члена были между собой равны. Из этого условия легко находим следующие соотношения для чисел m и r:

$$(2) \qquad m = r\,\frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \qquad (i=\overline{0, n-1};\ j > i)$$

$$(3) \qquad m = r\,\frac{a-1-b_{\nu_k}}{\nu_k - 1} \qquad (k=\overline{o,n};\ \nu_k \neq 1).$$

Возможен и так называемый „особый случай":

$$(4) \qquad m = r\,\beta_1/\alpha.$$

ТЕОРЕМА 1. Дифференциальное уравнение (D) может иметь только такие решения вида (E), для которых числа m и r связаны некоторым из соотношений (2), (3) или (4).

2. Если предположим, что (E) является решением уравнения (D) и если определим полиномы $B_{\nu_k}{}^*(t)$ $(k=\overline{0,n})$ и $A^*(t)$ как

$$(5) \qquad B_{\nu_k}{}^*(t) = \dot{F}_r(t)\ B_{\nu_k}(F_r(t)), \ A^*(t) = A(F_r(t)),$$

тогда получаем

$$A^*(t)\,\dot{y} = \sum_{k=0}^{n} B^*_{\nu_k}(t)\,y^{\nu_k}, \tag{6}$$

причём $y = y(t)$ даётся с (E).

Предположим, что числа m и r связаны только одним из соотношений (2). Полностью аналогично как и в [1], показывается, что это предположение включает в себя следующие условия:

$$b_{\nu_k} < \frac{(\nu_j - 1 - \nu_k)\,b_{\nu_i} + (1 + \nu_k - \nu_i)\,b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \qquad (k = \overline{o, n};\ k \neq i, j) \tag{7}$$

$$a - 1 < \frac{(\nu_j - 2)\,b_{\nu_i} - (\nu_i - 2)\,b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \tag{8}$$

Полиномы S и Q будем определять как

$$S = \left[\sqrt[q]{-B^*_{\nu_i} / B^*_{\nu_j}}\right], \quad -B^*_{\nu_i} = B^*_{\nu_j} S^q + Q \qquad (q = \nu_j - \nu_i),$$

где S — целая рациональная часть разложения $\sqrt[q]{-B^*_{\nu_i}(t)/(B^*_{\nu_j}(t)}$ по целым убывающим степеням t. Как известно [2], если выполняются условия (7) и (8), тогда уравнение (6) может удовлетворяться только полиномами $y = \Phi_m(t) = \omega_t S$, где $\omega_t\,(t = \overline{1, q})$ являются корнями уравнения $\omega^q = 1$.

Значит, елси предположим, что уравнение (D) может иметь только такие решения вида (E), для которых числа m и r связаны только одним из соотношений (2), тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. Дифференциальное уравнение (D) имеет решения вида (E) тогда и только тогда, когда для некоторого $1 \leq t \leq q$ выполняется:

(I) $\Phi_m = \omega_t S$

(II) $A^*\,\omega_t\,\dot{S} = \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n} B^*_{\nu_k} \cdot (\omega_t S)^{\nu_k} - Q\,(\omega_t S)^{\nu_i}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Лазов: Об одной теореме Л. Г. Орешенко (во печат).

2. Л. Г. Орешенко: Дифференц. уравн., 10 (2), 1974, 253—257.

Резиме

Во овој труд се најдени потребните и доволни услови под кои равенката (D) има партикуларри интеграли од обликот (E).