SUR LA VALEUR PRINCIPALE DE L'INTÉGRALE IMPROPRE

V-ième note

Dragan Dimitrovski, Miloje Rajović

Qu'il nous soit donné une intégrale définie $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ d'une fonction réelle $f(x)$. Que les limites a et b dans cette intégrale soient les points singuliers de la fonction $f(x)$. Alors il s'agit de la valeur principale de l'intégrale définie

$$v.\,p.\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0}\int\limits_{a+r}^{b-r} f(x)\,dx. \tag{1}$$

On ne trouve dans la litterature élémentaire que les traitements particuliers de ce cas [1], [2]. Au moyen de nos résultats [3] et [4] on peut donner une mèthode du calcul des intégrales (1) dans un cas assez large de la fonction $f(x)$. Celle -ci étant continue sur $[a+r,\ b-r]$, cet intervalle étant une partie de $[a, b]$ pour $r>0$, on peut employer immédiatement le résultat général de [3]:

$$\begin{aligned} &v.\,p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \\ &= (a-b)\lim_{r\to 0}\sum_{C\setminus axe\,pos} Res\,\frac{ln\,z}{(1+z)^2}\,f\left(\frac{(a+r)\,z+b-r}{1+z}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

si la valeur principale à côté gauche existe.

Mais la formule (2) ne nous dit rien sur les conditions de l'éxistence de l'intégrale (2). Elle nous donne seulement un appareil du calcul dans lequel on trouve des résidus d'une fonction analytique en dépendence des limites $[a+r,\ b-r]$ arbitrairement proches à $[a, b]$. On a besoin d'un critère d'éxistence de la valeur (1).

Il est de même dans le cas si $f(x)$ a des pôles du premier rang c_k dans l'intérieur de $[a, b]$, $(a < c_k < b)$. Les points a et b étant aussi singuliers, on a d'après [4]:

$$v.\,p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to 0} \int_{a+r}^{c_1-r} f(x)\,dx + \lim_{r\to 0} \sum_i \int_{c_i+r}^{c_{i+1}-r} f(x)\,dx +$$

$$\text{(3)} \qquad + \lim_{r\to 0} \int_{c_n+r}^{b} (x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \left(\pi i + ln \frac{b - c_k}{c_k - a}\right) \operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z) +$$

$$+ (a - b) \lim_{r\to 0} \sum_{C \setminus axe\ r\grave{e}els} \text{Res} \frac{\ln z}{(1 + z)^2} f\left(\frac{(a+r)\,z + b - r}{1 + z}\right)$$

On a aussi bésoin d'un théorème qui justifierait ce calcul, ou donnerait une formule analogue.

C'est pourquoi nous proposons le critère suivant:

Théorème. Soit $f(x)$ une fonction réelle du variable réel x, telle que $f(z)$ soit analytique sur le plan des complexes, éxeption faite:

1° des points $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, étant des pôles du rang respectivement k, n de la fonction $f(z)$;

2° des points x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, intérieurs dans l'intervalle $[a, b]$ étant tous les pôles du premier rang.

3° des pôles ou des points singuliers essentiels isolés z de la fonction $f(z)$ dans le plan complèxe.

Alors les valeurs principales (1), (2) et (3) existent si et seulement si:

a) les points a et b sont les pôles du meme rang: $k = n$,

b) la partie générale du devellopement laurentien autour des pôles $z = a$ et $z = b$ est identique:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=b} f(z); \quad B_{2,\,a} = B_{2,\,b}\,; \ldots ;\ B_{n,\,a} = B_{n,\,b}$$

et sans l'égard au nombre **m** des pôles x_k du premier rang, la valeur (3) existe toujours et elle est comme il suit

$$- \ v.\,p. \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{distence\ finie} \text{Res} \left(\ln \frac{z - a}{b - z} f(z)\right) +$$

$$\text{(5)} \qquad + \operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(f(z) \cdot \ln \frac{z - a}{b - z}\right) + 2 \left\{\frac{B_2}{b - a} + \frac{B_4}{3(b - a)^3} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{B_{2e}}{(2l - 1)\,(b - a)^{2l-1}}\right\} + \sum_{k=1}^{m} \ln \frac{x_k - a}{b - x_k} \operatorname*{Res}_{z=x_k} f(z).$$

Pour démontrer cette formule, on ne peut pas prendre la mèthode de la substitution employé dans notre Note no. 3, car on ne peut pas fermer l'intervalle. On va prendre ici une mèthode qui se base sur les propriétés du logarithme. La fonction analytique

$$f(z)\,\ln\frac{z-a}{b-z}$$

ayant les même singularités que $f(z)$, sur l'axe des x dans le sens direct a l'argument égal à zéro, et dans le sens réversible, le module $f(x)\cdot\ln\frac{x-a}{b-x}$ restant le même, l'argument se change avec $2\pi i$ ($f(z)$ étant uniforme). C'est pourquoi, en entourant les points singulier avec les cercles, on peut parcourir l'intervalle $[a, b]$ avec une coupure qui conserve la valeur $f(x)$ et les intégrales sur les demi-intervalles ou celles -ci sont régulières. Le grand cercle $|z|=R$ complète une région doublement connêxe. Une intégrale curviligne prise sur ce contour fermé nous donne:

$$\oint\limits_{|a-z|=r} f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz+\int\limits_{a+r}^{c_1-r} f(x)\ln\frac{x-a}{b-x}\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\int\limits_{c_i+r}^{c_{i+1}-r} f(x)\ln\frac{x-a}{b-x}\,dx+\int\limits_{c_m+r}^{b-r} f(x)\ln\frac{x-a}{b-x}\,dx+$$

$$+\oint\limits_{|z-b|=r} f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz+\int\limits_{b-r}^{c_m+r}\left(\ln\frac{x-a}{b-x}+2\pi i\right)f(x)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\int\limits_{c_{i+1}-r}^{c_i+r}\left(\ln\frac{x-a}{b-x}+2\pi i\right)f(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{c_1-r}^{a+r}\left(\ln\frac{x-a}{b-x}+2\pi i\right)f(x)\,dx+\oint\limits_{|z|=R} f(z)\cdot\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz=$$

$$=2\pi i\sum_{\substack{\text{distence}\\ \text{finie}}}\operatorname{Res}\left(f(z)\cdot\ln\frac{z-a}{b-z}\right)$$

On calcule sérarement cettes intégrales. Prenant les séries de Laurent pour le logarithme et pour $f(z)$, on a après un calcul dont les détails sont éliminés:

$$\oint\limits_{|z-a|=r} f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz = -2\pi i\Big\{[\ln r-\ln(b-a)]\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)+$$

$$+\frac{1}{b-a}B_2+\frac{1}{2(b-a)^2}B_3+\dots+\frac{1}{(k-1)(b-a)^{k-1}}B_k\Big\}+$$

$$+4\pi^2\cdot\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)-2\pi i\left[\frac{B_k}{1-k}\frac{1}{r^{k-1}}+\frac{B_{k-1}}{2-k}\frac{1}{r^{k-2}}+\dots+\frac{B_2}{(-1)}\frac{1}{r}\right]+$$

$$+\frac{A_0}{1}r+\frac{A_2}{2}r^2+\dots+\frac{A_n}{n}r^n+\dots$$

et de même facon

$$\oint\limits_{|z-b|=r} f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz = -2\pi i\Big\{[\ln(b-a)-\ln r]\operatorname*{Res}_{z=b} f(z)+$$

$$+\frac{B_2'}{b-a}-\frac{B_3'}{2(b-a)^2}+\frac{B_4'}{3(b-a)^3}+\dots+\frac{(-1)^n B_n'}{(n-1)(b-a)^{n-1}}\Big\}-$$

$$-4\pi^2\cdot\operatorname*{Res}_{z=b} f(z)+2\pi i\Big\{\frac{B_n'}{(1-n)\,r^{n-1}}+\frac{B'_{n-1}}{(2-n)\,r^{n-3}}+\dots+$$

$$+\frac{B_2'}{(-1)\,r}\Big\}+\sum_{k=0}^{+\infty}A_k'\cdot\frac{r^{k+1}}{k+1}$$

où A_k, B_k et A_k', B_k', sont les coefficients dans les devellopements laurentients respectivement sur les cerles $|z-a|=r$ et $|z-b|=r$.

Un calcul de l'intégrale autour de chaque pôle x_k c'est à dire sur le cercle $|z-x_k|=r$, où on a pris les deux démicercles, de 0 jusqu'à $-\pi$; et dépuis π jusqu'à 0, à cause de deux branches du logarithme, nous donne (les détails du calcul sont omis):

$$\oint\limits_{|z-x_k|=r}\ln\frac{z-a}{b-z}\cdot f(z)\,dz = -2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=x_k} f(z)\cdot\ln\frac{x_k-a}{b-x_k}.$$

Après avoir employé la définition de la *v. p.* $\int_a^b f(x)\,dx$, pour que le procès des limites $r\to 0$ nous donne un résultat déterminé, les conditions (4) sont évidament nécessaires et suffisantes. Une concentration des calcules donne la formule définitive (5). Le théorème est démontré.

Quelques conséquences s'imposent par leur importance:

Corolaire I. Si une des limites a, b de l'intégrle est un point simple de la fonction $f(z)$, et si l'autre est un pôle du rang arbitraire, la valeur principale

$v.\ p. \int_a^b f(x)\,dx$ ne peut jamais éxister.

Corolaire II. Si $f(x)$ n'a d'autres singularités que $z = a$ et $z = b$, étant tous les deux les pôles du même rang $k = 2l$ ou $k = 2l + 1$, la valeur principale (1) existe toujours si les devellopements laurentient sont avec les parties générales analogues, et elle est comme il suit.

$$
\begin{aligned}
-\,v\,p. \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\substack{distence\\ finie}} \operatorname{Res}\left(f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\right) + \\
(6)\qquad + 2\left\{\frac{B_2}{b-a} + \frac{B_4}{3(b-a)^3} + \frac{B^6}{5(b-a)^5} + \cdots + \frac{B_{2l}}{(2l-1)\,(b-a)^{2l-1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Corolaire III. Si les points $z = a$ et $z = b$ sont les pôles du premier rang de $f(z)$, avec $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_{z=b} f(z)$, la $v.\ p. \int_a^b f(x)\,dx$ existe toujours, et elle est donnée d'une somme des résidus

$$
-\,v.\ p. \int_a^b (x)\,dx = \sum_{\substack{distence\\ finie}} \operatorname{Res}\left(f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\right)
$$

Exemples 1. L'intégrale $v.\ p. \int_2^1 \frac{dx}{(x-1)\,(x-2)}$ n'existe pas, car $\operatorname{Res}_{z=+1} f(z) = -1 \neq \operatorname{Res}_{z=2} f(z) = 1$.

L'intégrale $v.\ p. \int_1^2 \frac{x-3/2}{(x-1)\,(x-2)}\,dx$ existe, car $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \operatorname{Res}_{z=2} f(z) = 1/2$ et la formule nous donne sa valeur 0.

2. $v.\ p. \int_a^b \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A}{x-b}\right)\left[f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + C\right] dx$

existe.

3. Si $f(z) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{A_k}{(z-b)^k}\right]\right)\cdot$

$$\cdot\left(F(z) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,(\varphi(z)-\varphi(a))\right)$$

les $F(z)$, $\varphi(z)$ étant arbitraires, l'intégrale $v.p. \int_a^b f(x)\,dx$ existe toujours.

4. $v.\ p. \displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3 - 4x^2 + 1}{x^2 (x-1)^2} [e^x - (e-1)\,x - 1 + c]\,dx$ existe.

5. $$v.\ p. \int_1^4 \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{(1+x^2)(x-2)}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{5} \ln 2 + \frac{1}{10} \ln \frac{2}{17} - \frac{2}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{5},$$

un résultat obtenu diretcement de la formule.

LITTERATURE

[1] Fihtengoljc — Kurs diffrerenc. int. iščisljenijah, tom II, otdel Nesopstvennij integral

[2] Mitrinović — Kompleksna analiza, Calculus of residues, Groningen.

[3] Dimitrivski — Adamović — Sur quelques formules du calcul des résidus, Matematički vesnik, 2 (16), 1965, Beograd.

[4] Dimitrovski—Rajović: Sur la valeur principale de l'intégrale imporpre, III — ième Note, Annuaire de la Faculté des sciences de l'Université de Skopje, tome 25—26, 1975/76, pp. 41—52.

ЗА ГЛАВНАТА ВРЕДНОСТ НА НЕСВОЈСТВЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Драѓан Димитровски, Милоје Рајовиќ

V нота

Резиме

Во литературата има мало формули и критериуми за егзистенција на несвојствениот интеграл во случај кога и самите крајни точки на конечниот интервал на интеграцијата се сингуларни за подинтегралната функција. Овој труд третира проблем на егзистенција на несвојствен интеграл v. p. $\int_a^b f(x)\,dx$, кога крајните точки a и b се полови од произволен ред на подинтегралната функција, и истовремено дава начин на пресметување. Се допуштаат евентуално и произволен број внатрешни изолирани сингуларни точки, но во случајов само полови од прв ред. Сите други претпоставки врху природата на сингуларитетите би излегле надвор од методава. Овие резултати не сме ги сретнале во литературата.