РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ НА БАЗЕ АСИМПТОТИКИ, ПОСТРОЕННОЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Д. Д. Байнов, Г. Х. Сарафова

В работах [1], [2] В. М. Волосов предлагает общую схему усреднения для решения задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon) = \varepsilon X_1(x, y, t) + \varepsilon^2 X_2(x, y, t) + \cdots \\ \dot{y} &= Y(x, y, t, \varepsilon) = Y_0(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t) + \varepsilon^2 Y_2(x, y, t) + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

$$x\,|_{t=t^0} = x^0 \qquad y\,|_{t=t^0} = y^0$$

где $xX, \in R^n$, $x, Y \in R^m$, а $\varepsilon < 0$ — малый параметр.

Настоящая работа посвящена решению методом усреднения двухточечной краевой задачи на собственные значения для систем типа (1) на аазе асимтотики построенной для задачи Коши.

Надо отметить, что краевые задачи на собственные значения имеют применение в много областях математике и механике. К задаче подобного типа приводит, например, задача на условный экстремум в вариационном исчислениии.

В дальнейшем будем пользоваться асимптотическими формулами выведенными в [2].

Кратко изложим предложенную там схему усреднения.

Предполагается, что общее решение вырожденной системы

$$\dot{\tilde{y}} = Y_0(x, \tilde{y}, t) \qquad x = \mathrm{const} \tag{2}$$

в которую переходит система (1) при $\varepsilon = 0$, в рассматриваемой области известно. Далее предполагается, что вдоль интегральных кривых $\tilde{y} = \varphi(x, t)$ системы (2) существуют средние значенияа вида

$$\overline{X}_1(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t^0}^{t^0+T} X_1(x, \varphi(x, t), t)\, dt \tag{3}$$

для правых частей (I), и что эти средние значения зависят от параметра x, а от начальных значений t^0, y^0 не зависят. Как показано в [1], [2], предположение о независимости предела (3) от начальных значений не ограничивает, вообще говоря, общности задачи, так как более общий случай может быть сведен к рассматриваемому.

Системе (I) ставится в соответствие усредненная система первого приближения

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}_1 (\bar{x}) \qquad \bar{x}\big|_{t=t^0} = x^0 \tag{4}$$

В [2], при некоторых общих ограничениях В. М. Волосов доказал, что решения системы (4) аппроксимируют решения системы (I) на большом интервале времени $\left[t^0, \dfrac{l}{\varepsilon}\right]$.

Уравнения для следующих приближений получаются отысканием заменый переменных вида

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}\ \bar{y}\ t) + \cdots \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}, t) + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

где u_i, v_i — соответственно n — мерные и m — мерные векторные функции, при помощи которой система (1) приводится к усредненной фирме

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon X_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \cdots \\ \dot{\bar{y}} &= y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Если допустить, что коэффициенты u_i, v_i, A_i и B_i определены, уравнение n — ого пприближения для x и $(n-1)$ — ого приближения для y принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_n &= \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x}_n) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}_n) + \cdots + \varepsilon^n A_n(\bar{x}_n) \\ \dot{\bar{y}}_{n-1} &= Y_0(\bar{x}_n, \bar{y}_{n-1}, t) + \varepsilon B_1(\bar{x}_n) + \cdots + \varepsilon^{n-1} B_{n-1}(\bar{x}_n) \end{aligned} \tag{7}$$

После решения уравнений (7) находятся приближения для решений исходной системы

$$\begin{aligned} x_n &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}_n, \bar{y}_{n-1}, t) + \cdots + \varepsilon^{n-1} u_{n-1}(\bar{x}_n, \bar{y}_{n-1}, t) \\ y_{n-1} &= \bar{y}_{n-1} + \varepsilon v_1(\bar{x}_n, \bar{y}_{n-1}, t) + \cdots + \varepsilon^{n-2} v_{n-2}(\bar{y}_n, \bar{y}_{n-1}, t) \end{aligned} \tag{8}$$

Для неизвестных векторных функций u_i имеют место уравнения вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} u_i = S_i \tag{9}$$

и наххарактеристиках этих уравнений в частных производных представляются в форме

$$u_i = u_i \Big|_{t=t^0} + \int\limits_{t^0}^{t} S_i(x, \varphi(x, y^0, t^0, t), t)\, dt \tag{10}$$

Функции v_i определяютсй из уравнений

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial y} Y_0 - \frac{\partial Y_0}{\partial y} v_i = \Phi_i \tag{11}$$

Здесь S_i, Φ_i — некоторые известные функции. Функци A_i и B_i выбираются так, чтобы коэффициенты u_i и v_i были ограниченными на рассматриваемом интервале $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

В [1], [2] В. М. Волосов доказал, что при некоторых ограниченнях системы

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x}_2) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}_2) \\ \dot{\bar{y}}_1 &= Y_0(\bar{x}_2, \bar{y}_1, t) + \varepsilon B_1(\bar{x}_2) \end{aligned} \tag{12}$$

аппроксимируют решения системы (1) на интервале $\left[t^0, \frac{l}{\varepsilon}\right]$. Условия теоремы В. М. Волосова перечислять не будем, так как их можно найти в работе [2], а дадим только текст теоремы:

ТЕОРЕМА В. М. ВОЛОСОВА. При условиях, указаных в [2], для произвольного числа $l > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$, существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ на интервале $[t^0, t^1(\varepsilon)]$ решение $x = x(x^0, y^0, t^0, t)$, $y = y(x^0, y^0, t^0, t)$ системы (1) не выходит из области G и выполняются неравенства

$$|y - \bar{x}_2 - \varepsilon u_1(\bar{x}_2, \bar{y}_1, t)| \leqslant \varepsilon\delta$$

и

$$|x - \bar{y}_1| \leqslant \delta$$

где $\overline{x}_2=\overline{x}_2(x^0, y^0, t^0, t)$, $\overline{y}_1=\overline{y}_1(x^0, y^0, t^0, t)$ — решение системы (12) причем $(\overline{x}_2-x)|_{t=t_0}=0$ и $(\overline{y}_1-y)|_{t=t_0}=0$. ($G$ — открытая область в $n+m+1$ — мерном пространстве переменных x, y и t).

Пусть для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\varepsilon X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)\\ \dot{y}&=Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)\end{aligned} \tag{13}$$

где x, $X\in R^n$, x, $Y\in R^m$, $\lambda\in\Lambda\subset R^s$ а $\varepsilon>0$ — малый параметр, задано краевое условие

$$R[z(0),\ z(T)=0 \tag{14}$$

Здесь $z=(x, y)$, $t\in[0, T]$, $T=\dfrac{l}{\varepsilon}$, $l=\text{const}>0$

λ — неизвестный параметр.

Предположим, что выполнены следующие условия А):

А 1. Функция R — достаточно гладкая $n+m+s$ — мерная векторная функция.

А 2. В каждой точке замкнутой области Λ выполнены условия теоремы В. М. Волосова.

А 3. Функции X и Y достаточно гладкие по x, y и λ.

Будем исследовать решение поставленной краевой задачи при помощи формул (8) и при предположении, что начальные значения задачи Коши для системы (13) и параметр λ имеют вид

$$\begin{aligned}z|_{t=0}&=a_0+\varepsilon a_1+\cdots+\varepsilon^n a_n+\cdots\\ \lambda&=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\cdots+\varepsilon^n\lambda_n+\cdots\end{aligned} \tag{15}$$

Подставим (8) в (13) после чего представим R в виде разложения по степеням ε:

$$R[\overline{x}_n(0)+\varepsilon u_1(0)+\cdots,\ \overline{y}_{n-1}(0)+\varepsilon v_1(0)+\cdots,$$

$$\overline{x}_n(T, \lambda_0)+\varepsilon\left(\frac{\partial\overline{x}_n(T, \lambda_0)}{\partial\lambda}\lambda_1+u_1(T, \lambda_0)\right)+\cdots,$$

$$\overline{y}_{n-1}(T, \lambda_0)+\varepsilon\left(\frac{\partial\overline{y}_{n-1}(T, \lambda_0)}{\partial\lambda}\lambda_1+v_1(T, \lambda_0)\right)+\cdots]=$$

$$=R_0+\varepsilon R_1+\cdots+\varepsilon^n R_n+\cdots$$

Условие (13) дает

$$R_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{16}$$

При $k = 0$ получаем

$$R_0 = R\,\overline{x}_n(0),\ \overline{y}_{n-1}(0),\ \overline{x}_n(T, \lambda_0),\ \overline{y}_{n-1}(T, \lambda_0)] = 0 \tag{17}$$

Функциональные значения $\overline{x}_n(T, \lambda_0)$ и $\overline{y}_{n-1}(T, \lambda_0)$ связаны с $\overline{x}_n(0)$ и $\overline{y}_{n-1}(0)$ уравнениями (7), так что в конечном счете в уравнении (17) в качестве параметров, значения которых должны быть определены можно рассматривать $\overline{x}_n(0)$, $\overline{y}_{n-1}(0)$ и λ_0, число которых $n+m+s$ равно числу уравнений (14).

Обозначим коэффициент перед k — ой степенью ε в (8) через $z_k(t)$.

Предположим, что (17) разрешимо относительно $z_0(0)$ и λ_0 и обозначим его решения через $(a_0, \overline{\lambda}_0)$.

Уравнения $R_\nu = 0$ $(\nu > 0)$ будут давать каждый раз систему относительно $t_\nu(0)$ и λ_ν.

Значения $u_\nu(0)$ и $u_\nu(T)$ связаны между собой соотношением

$$u_\nu(T) = u_\nu(0) + \int_0^T S_\nu\,dt \tag{18}$$

а связь между $v_\nu(T)$ и $z_\nu(0)$ определяется характеристиками уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \nu_\nu}{\partial t} + \frac{\partial \nu_\nu}{\partial y} Y_0 - \frac{\partial Y_0}{\partial y} \nu_\nu = \Phi_\nu \equiv \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_\nu + T_\nu \tag{19}$$

где T_ν некоторая известная, зависящая от u_s $(s < \nu)$, но независящая от u_ν. Таким образом в системах $R_\nu = 0$ в качестве неизвестных остаются $z_\nu(0)$ и λ_ν. Каждая из этих систем при $\nu > 0$ будет линейной относительно $z_\nu(0)$ и λ_ν.

Обозначим через R^i $(i = 1, 2)$ функциональную матрицу, составленную из производных компонент вектора R по компонентам i — ого векторного аргумента.

Введем определитель

$$\Delta^0{}_0 = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial R_0}{\partial z_0(0)}, \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}\right)\Bigg|_{\substack{z_0(0)=a_0 \\ \lambda_0=\overline{\lambda}_0}} \tag{20}$$

Матрицу $\left(\frac{\partial R_0}{\partial z_0(0)}, \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}\right)$ можно представить образом

$$\left(\frac{\partial R_0}{\partial z_0(0)}, \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}\right) = ((R^1)^0{}_0,\ O_s) + \left((R^2)^0{}_0 \frac{\partial z_\nu(T,\lambda)}{\partial z_\nu(0)},\ O_s\right) + \\ + \left(O_{n+m},\ (R^2)_0{}^0 \frac{\partial z_\nu(T,\ \lambda_0)}{\partial \lambda}\right) \tag{21}$$

где

$$R^1,\ R^2,\ \frac{\partial z_0(T,\ \lambda_0)}{\partial z_0(0)},\ \frac{\partial z_0(T,\ \lambda_0)}{\partial \lambda} \quad \text{— матрицы,}$$

$$(R^i)_0{}^0 = R^i(z_0(0),\ z_0(T,\ \lambda_0))\,\Big|_{\substack{z_0(0)=a_0 \\ \lambda_0=\bar{\lambda}_0}}$$

а O_s и O_{n+m} — матрицы порядка $(m+n+s)\times s$ и соответственно $(n+m+s)\times(n+m)$ с нулевыми элементами.

Обозначим через $\Delta_\nu{}^0$ $(\nu>0)$ определитель системы $R_\nu=0$. Матрицу коэффициентов системы $R_\nu = 0$ $(\nu > 0)$ можно представить в виде

$$\left\{((R^1)_0{}^0;\ O_s) + \left((R^2)_0{}^0 \frac{\partial z_\nu(T,\ \lambda)}{\partial z_\nu(0)}, O_s\right) + \right. \\ \left. + \left(O_{n+m},\ (R^2)_0{}^0 \frac{\partial z_\nu(T,\ \lambda)}{\partial \lambda}\right)\right\}\Bigg|_{\substack{z_0(0)=a_0 \\ \lambda_0=\bar{\lambda}_0}} \tag{22}$$

где

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial z_\nu(0)} = \left(\begin{array}{c|c} E_n & O_{nm} \\ \hline \dfrac{\partial v_\nu}{\partial u_\nu(0)} & \dfrac{\partial v_\nu}{\partial v_\nu(0)} \end{array}\right) \tag{23}$$

Здесь E_n и O_{nm} соответственно единичная и нулевая матрицы. Решимость систем $R_\nu = 0$ $\nu > 0)$ утверждается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

1. Выполнены условия А).
2. Система $R_0 = 0$ разрешима в отношении $(z_0(0),\ \lambda_0)$.
3. $\Delta_1{}^0 \neq 0$.

Тогда при выборе некоторого фиксированного решения $(z_0(0) = a_0,\ \lambda_0 = \bar{\lambda}_0)$ системы $R_0 = 0$, системы уравнений $R_\nu = 0$ $(\nu > 0)$ будут однозначно возрешимы относительно $(z_\nu(0),\ \lambda_\nu)$.

Доказательство.

Покажем, что матрица (23) не зависит от ν. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Из (18) следует, что решение системы (19) можно представить в виде

$$\nu_\nu = L(L^{-1}|_{t=0})\,\nu_\nu(0) + \left(L\int_0^t L^{-1}\frac{\partial Y_0}{\partial x}\,d\,t\right) u_\nu(0) + \\ + L\int_0^t L^{-1}\frac{\partial Y_0}{\partial x}\,d\,t\int_0^t S_\nu\,d\,t + L\int_0^t L^{-1}\,T_\nu\,d\,t \tag{24}$$

где L — матцица фундаментальных решений системы уравнений в вариациях, соответствующей системе (2).

Из (24) следует, что

$$\frac{\partial \nu_\nu}{\partial u_\nu(0)} = (L\,|_{\,t=T})\,(L^{-1}\,|_{\,t=0}) \\ \frac{\partial \nu_\nu}{\partial u_\nu(0)} = (L\,|_{\,t=T})\int_0^t L^{-1}\frac{\partial Y_0}{\partial x}\,dt \tag{25}$$

Правые части равенств (25) не зависят от ν. Из (22) следует что все определители $\Delta_\nu{}^0$ $(\nu > 0)$ равны $\Delta_1{}^0 \neq 0$.

Теорема доказана.

Если выполнены условия теоремы I, можно последовательно найти $z_\nu(0)$ и λ_ν что дает возможность определить коэффициенты разложений (8) и (15).

Полученное разложение при определенных условиях будет асимптотическим разложением решения поставленной краевой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть:

1. Система $R_0 = 0$ разрешима относительно $z_0(0)$, λ_0.
2. Функциональный определитель $\Delta_0{}^0 \neq 0$.
3. В каждой точке λ замкнутой области Λ для системы

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \varepsilon\,X(x,\ y,\ t,\ \lambda,\ \varepsilon) \\ \frac{d\,y}{d\,t} = Y(x,\ y,\ t,\ \lambda,\ \varepsilon) \qquad z\,|_{\,t=0} = z^0 \tag{26}$$

$$\frac{dp}{dt}=\varepsilon\left(\frac{\partial X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial x}p+\frac{\partial X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial y}q\right)$$

$$r\,|_{t=0}=E_{n+m}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial x}p+\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial y}q$$

$$\frac{dk}{dt}=\varepsilon\left(\frac{\partial X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial x}k+\frac{\partial X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial y}l+\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial x}k+\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial y}l+\frac{\partial Y(x, y, t, \lambda, \varepsilon)}{\partial \lambda}$$

$$h\,|_{t=0}=O_{n+m}$$

где

$$p=(p_{ij})_{n,\ m+n} \qquad k=(k_{ij})_{ns} \qquad r=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$q=(q_{ij})_{m,\ m+n} \qquad l=(l_{ij})_{m,\ s} \qquad h=\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

выполнены условия теоремы В. М. Волосова.

4. Функции X и Y имеют непрерывные частнюе производные первого перядка по λ.

5. Функпия R имеет непрерывные частные производиые первого порядка.

Тогда для каждого достаточно малого $\varepsilon\in(0, \varepsilon^0)$ в некоторой достаточно малой, независящей от ε окрестности точки $g_0=(a_0, \bar{\lambda}_0)$ существует и притом единственное значение $(Z^0, \bar{\bar{\lambda}}_0)$, такое, что решение $Z(t, \varepsilon, \bar{\bar{\lambda}}_0)$ системы (13), определяемое начальным условием $Z(t, \varepsilon, \bar{\bar{\lambda}}_0)\,|_{t=0}=Z^0$, удовлетворяет поставленному краевому условю.

Если кромс того выполнено узловие 3, теоремы I, то формула

$$z_1=\bar{z}_1$$

где

$$z_1=(x_1, y_1,), \qquad \bar{z}_1=(\bar{x}_2, \bar{y}_1)$$

дает в первом приближении асимптотическое представление решения краевой задачи (13), (14).

Доказательство.

Обозначим через $z(t, \varepsilon, z^0, \lambda^0)$ решение задачи Коши для системы (13) при $\lambda=\lambda^0$ и с начальным условием $z\,|_{t=0}=Z^0$.

Исследуем

$$R[z^0, Z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)]$$

как функцию z^0, λ^0 и ε.

Обозначим через Δ определитель матрицы $\left(\frac{\partial R}{\partial z^0}, \frac{\partial R}{\partial \lambda^0}\right)$.

Покажем, что имеет место асимптотическое представление

$$\Delta = \Delta_0 + (\varepsilon) \tag{27}$$

где Δ_0 — определитель матрицы $\left(\frac{\partial R_0}{\partial z_0(0)}, \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}\right)$, значение которого при $z^0(0) = a_0$, $\overline{\lambda}_0 = \lambda_0$ было обозначено через Δ_0^0.

Здесь и в дальнейшем символом (ε) будем обозначать величину, удовлетворяющую неравенству $|\varepsilon| < m(\varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} m(\varepsilon) = 0$.

Матрица $\left(\frac{\partial R}{\partial z^0}, \frac{\partial R}{\partial \lambda^0}\right)$ записывается в форме

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial R}{\partial z^0}, \frac{\partial R}{\partial \lambda^0}\right) &= (R^1(z^0, z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)), O_s) + \\ &+ \left(R^2(z^0, z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0))\cdot\frac{\partial z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)}{\partial z^0}, O_s\right) + \\ &+ \left(O_{n+m}, R^2(z^0, z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0))\cdot\frac{\partial z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)}{\partial \lambda^0}\right)\end{aligned} \tag{28}$$

прачем согласно условиям теоремы имеет место асимптотическое представление

$$\begin{aligned} x(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0) &= \overline{x}_2(T, z^0, \lambda^0) + (\varepsilon) \\ y(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0) &= \overline{y}_1(T, z^0, \lambda^0) + (\varepsilon)\end{aligned} \tag{29}$$

Матрицы $\frac{\partial z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)}{\partial z^0}$ и $\frac{\partial z(T, \varepsilon, z^0, \lambda^0)}{\partial \lambda^0}$ удовлетворяют системе

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, y, t, \lambda^0, \varepsilon) \qquad z\,|_{t=0} = z^0$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y, t, \lambda^0, \varepsilon)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial z^0}=\varepsilon\left(\frac{\partial X(x,\ y,\ t,\ \lambda^0,\varepsilon)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z^0}+\frac{\partial X(x,\ y,\ t,\ \lambda^0,\ \varepsilon)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial z^0}\right|_{t=0}=E_{n+m}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial z^0}=\frac{\partial Y(x,\ y,\ t,\ \lambda^0,\ \varepsilon)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z^0}+\frac{\partial Y(x,\ y,\ t,\ \lambda^0,\ \varepsilon)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z^0} \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}=\varepsilon\left(\frac{\partial X(x,y,t,\lambda^0,\varepsilon)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}+\frac{\partial X(x,y,t,\lambda^0,\varepsilon)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda^0}+\frac{\partial X(x,y,t,\lambda^0,\varepsilon)}{\partial\lambda^0}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y^0}{\partial y}=\frac{\partial Y(x,y,t,\lambda^0,\varepsilon)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}+\frac{\partial Y(x,y,t,\lambda^0\,\varepsilon)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda^0}+\frac{\partial Y(x,y,t,\lambda^0,\varepsilon)}{\partial\lambda^0}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial\lambda^0}\right|_{t=0}=O_{n+m}$$

и согласно условиям теоремы для них имеет место асимптотическое представление

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial z^0}&=\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial z^0}\right)_2}+(\varepsilon)\\
\frac{\partial y}{\partial z^0}&=\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_1}+(\varepsilon)\\
\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}&=\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}\right)_2}+(\varepsilon)\\
\frac{\partial y}{\partial\lambda^0}&=\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda^0}\right)_1}+(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{31}$$

Имея ввиду (29) и (31) получаем асимптотическое представление

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial R}{\partial z^0},\ \frac{\partial R}{\partial\lambda^0}\right)&=((R^1)_0,\ O_s)+\Bigg)\left((R^2)_0\left(\overline{\begin{matrix}\left(\frac{\partial x}{\partial z^0}\right)_2\\ \left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_1\end{matrix}}\right),\ O_s\right)+\\
&+\left(O_{n+m},\ (R^2)_0\left(\overline{\begin{matrix}\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda^0}\right)_2\\ \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda^0}\right)_1\end{matrix}}\right)\right)+(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$(R^i)_0 = R^i [z^0, \ \overline{x}_2 (T, \ z^0, \ \lambda^0), (\overline{y}_1 (T, \ z^0 \ \lambda^0)] \tag{33}$$

Нулевой член асимптотики (32) при $z^0 = a_0$, $\lambda^0 = \overline{\lambda}_0$ совпадает с $\left(\frac{\partial R_0}{\partial z_0 (0)} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}\right)_{\substack{z_0=(0)_0 \\ \lambda_0=\overline{\lambda}_0}}$.

Таким образом действительно имеет место асимптотическое представление (27). причем

$$\Delta_0 \Bigg|_{\substack{z_0=a_0 \\ \lambda^0=\overline{\lambda}_0}} = \Delta_0{}^0 \neq 0 \tag{34}$$

В силу (34), при достаточно малых ε, Δ_0 отлично от нуля в некоторой фиксированной, независящей от ε окрестности α точки $g_0 = (a_0, \overline{\lambda}_0)$, а в силу (27) этим свойством обладает и Δ.

Обозначим

$$R^0 = R [a_0, \ z (T, \ \varepsilon, \ a_0, \ \overline{\lambda}_0)]$$

Можно утверждать, что для каждого фиксированного достаточно малого ε в некоторй окрестности R^0 в пространстве R, размеры которого определяются тем, что соответствующая точка в пространстве $g^0 = (z^0, \overline{\lambda}^0)$ не выходит из α, существует однозначная и непрерывная обратная зависимость

$$g = g (R) \tag{35}$$

Нетрудно оценить производные от этой обратной функции. В силу того, что $\left|\left(\frac{\partial R}{\partial z^0} \cdot \frac{\partial R}{\partial \lambda^0}\right)\right| < C$ и в силу (27) эта оценка будет иметь вид

$$\left|\frac{\partial g}{\partial R}\right| < \frac{C}{\Delta_0{}^*} \tag{36}$$

где

$$\Delta_0{}^* = \mathrm{in}f |\Delta|$$

Рассмотрим решение системы (13) удовлетвояющее начальному условию $z (T, \ \varepsilon, \ \overline{\lambda}_0) |_{t=0} = a_0$.

Для этого решения

$$\begin{aligned} R [z (0), \ z (T)] &= R [a_0, \ z (T, \ \varepsilon, \ a_0, \ \overline{\lambda}_0)] = \\ &= R [a_0, \ \overline{x}_2 (T, \ a_0, \ \overline{\lambda}_0), \ \overline{y}_1 (T, \ a_0, \ \overline{\lambda}_0)] + (\varepsilon) = (\varepsilon) \end{aligned} \tag{37}$$

так как по построению

$$R [a_0, \ \overline{x}_2 (T, \ a_0, \ \overline{\lambda}_0), \ y_1 (T, \ o_0, \ \overline{\lambda}_0)] = 0$$

Таким образом, точке g_0 отвечает точка

$$R^0 = (\varepsilon) \tag{38}$$

Легко видеть, что в α окрестности g_0 найдется точка $(Z^0, \bar{\bar{\lambda}})$, и притом единственная, которой отвечает значение $R = 0$. Действительно, соединим прямолинейным отрезком $R = R^0$ с $R = 0$. Весь этот отрезок при достаточно малых значений ε будет целиком принадлежать области определения $g(R)$. В с самом деле, предполагая, что при движении по этому отрезку в пространстве R от R^0 к нулю найдется такая точка $R \neq 0$, что соответствующая эй точка попадает на границу области α приходим к противоречию, так как сосгласно (36) и (38)

$$|g^0 - g_0| \leqslant \left| \frac{\partial g^0}{\partial R} \right| \cdot |R - R^0| < \frac{C}{\Delta_0^*} m(\varepsilon) \tag{39}$$

а в то же время α — окрестность точки g_0 по построению является фиксированной, не зависящей от ε.

Этим мы доказали существование и единственность решения поставленной краевой задачи.

Докажем, что если выполнено также и условие 3. Теоремы 1 то формула

$$z_1 = \bar{z}_1 \tag{40}$$

где

$$z_1 = (x_1, y_1), \quad \bar{z}_1 = (\bar{x}_2, \bar{y}_1)$$

является для этого решения асимптотической.

Сравним решение $z(t, \varepsilon, \bar{\bar{\lambda}})$, удовлетворяющее началяному условию $Z|_{t=0} = Z^0$, с решеннем $z(t, \varepsilon, \bar{\lambda}_0)$, удовлетворяющим начальному условию $z|_{t=0} = a_0$. Согласно условиям теоремы

$$|Z(t, \varepsilon, \bar{\bar{\lambda}}) - z(t, \varepsilon, \lambda)| < m(\varepsilon) \tag{41}$$

С другой стороны, для решения задачи Коши для системы (13) при начальном условии $z|_{t=0} = a_0$ формула $z_1 = \bar{z}_1$ является асимптотической т. е.

$$|z(t, \varepsilon, \bar{\lambda}_0) - z_1| < m(\varepsilon) \tag{42}$$

Из (41) и (42) следует, что

$$z|(t, \varepsilon, \bar{\bar{\lambda}}) - z_1| < m(\varepsilon) \tag{43}$$

Этим доказательство закончено.

Пловдивский университет
имени П. Хилендарского

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Волосов—Метод усреднения и некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Докторская диссертация, Киев, Институт матем. АН УССР, 1961.
2. В. М. Воловов Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, т. XVII, вып. 6 (108), 1962.

Д. Д. Ба'нов, Г. Х. Сарафова

РЕШАВАЊЕ НА ДВОТОЧЕЧЕН КОНТУРЕН ПРОБЛЕМ СО СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ СО МЕТОДАТА НА УСРЕДНУВАЊЕ ВРЗ ОСНОВА НА АСИМПТОТИКАТА ЗА КОШИЕВАТА ЗАДАЧА

(Резиме)

Се разгледува двоточечниот контурен проблем со сопствени вредности за системот

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y, t, \lambda, \varepsilon)$$

$$\dot{y} = R(x, y, t, \lambda, \varepsilon)$$

$$t \in [0, T], \; T = \frac{l}{\varepsilon}, \; l = \text{const} > 0$$

каде x, $X \in R^n$, y, $Y \in R^m$, $\lambda \in \Lambda \subset R^s$ а $\varepsilon > 0$ мал параметар.

Докажани се две теореми. Во првата теорема се даваат условите, при кои може да се конструира формалната асимптотика на решението на зададениот проблем. Во втората теорема се докажува егзистенцијата и единственоста на решението на истиот проблем.