ПОЛИНОМНИ ПАРТИКУЛАРНИ ИНТЕГРАЛИ НА ЕДНА КЛАСА НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Петар Р. Лазов

1. Потребните услови за егзистенција на полиномни решенија на нехомогената линеарна диференцијална равенка,

$$B_n(x)\, y^{(n)} + B_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + B_0(x)\, y = A(x), \tag{1}$$

каде што $B_i(x)$ $(i = \overline{o, n})$ и $A(x)$ се полиноми со степен b_i односно a $(A \neq 0)$, и утврдува следната теорема:

ТЕОРЕМА 1. Равенката (1) може да има полиномни решенија само ако постои цел ненегативен број m таков, да меѓу броевите l_i $(i = \overline{o, n+1})$ определени како

$$l_i = b_i + m - i \;\; (i = \overline{o, n}),\;\; l_{n+1} = a,$$

има барем два броја l_i и l_j такви да важи

$$l_i = l_j;\; l_k < l_i \; (i \neq j;\; k \neq i, j;\; i, j, k = \overline{o, n+1}).$$

Оваа теорема произлегува од резултатите кои ги имаме најдено во [1].

Врз основа на теоремата 1 можат да се најдат сите можни вредности m за степените на полиномните интеграли на равенката (1). Ако е $l_i = a$ или $l_j = a$, тогаш m се пресметува како

$$m = a - b_k + k \quad (k = \overline{o, n}). \tag{2}$$

Овие вредности се викаат несингуларни експоненти. Сингуларните експоненти се пресметуваат [1] во функција од коефициентите испред највисокиот степен на полиномите B_i $(i = \overline{o, n})$.

2. Ќе претпоставиме дека се можни само несингуларни експоненти т.е. дека бројот m е определен со една од релациите (2). Исто така, за броевите b_i ќе претпоставиме дека важи

$$b_i < 2b_k + i - (a + k) \qquad (i = \overline{o, n};\; i \neq k). \tag{3}$$

Полиномите S и Q ќе ги определиме како

$$A = B_k S + Q, \quad S = [A/B_k] \tag{4}$$

каде што $[A/B_k]$ го означува полиномниот дел од развојот на $A(x)/B(x)$ по цели степени од x. При тоа важи

$$deg\ Q < b_k. \tag{5}$$

Ако (4) го замениме во (1), добиваме

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} B_i\, y^{(i)} = B_k\,(S - y^{(k)}) + Q. \tag{6}$$

Нека е $y = y(x)$ полином со степен m, при што бројот m е даден со една од релациите (2). Тогаш, врз основа на (3), лесно се добива

$$deg\,(B_i\, y^{(i)}) < b_k \quad (i = \overline{o,\, n};\ \ i \neq k). \tag{7}$$

Земајќи ги во обзир (5) и (7), од (6) непосредно следи

$$S = y^{(k)} \quad \text{т. е.} \quad y = I^k\ S + P_{k-1} \tag{8}$$

каде што $I\,x^k = x^{k+1}/(k+1)$, а $P_{k-1}(x)$ е произволен полином со степен $\leqslant k - 1$. Од (8) директно следи

ТЕОРЕМА 2. Диференцијалната равенка (1) има полиномни партикуларни решенија ако и само ако постои полином $P_{k-1}(x)$ со степен $\leqslant$ $\leqslant k - 1$, таков да важи

$$\sum_{i=0}^{k-1} (B_i\, I^{k-i} S + P_{k-1}^{(i)}) + \sum_{i=k+1}^{n} B_i\, S^{(i-k)} = Q, \tag{9}$$

и овие решенија се само функциите $y = I^k S + P_{k-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Лазов: Степени на полиномните решенија на алгебарските диференцијални равенки, Билтен на ТМФ, Скопје, 1976 (во печат).

Пеťар Р. Лазов

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Резюме

В этой работе найдены необходимые и достаточные условия существования полиномиальных частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения (1).