SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DE RICCATI

Petar R. Lazov, Dragan S. Dimitrovski

Dans cette Note est donnée la solution du probléme de prof. D. S. Mitrinovitch que voici:

Examiner si l'équation différentielle

(1) $(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\, y' = B_2 x^2 + B_1 x + B_0 + (C_1 x + C_0)\, y + y^2$

admet des solutions particulières de la forme suivante

(2) $$x = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad y = b_2 t^2 + b_1 t + b_0,$$

où

(3) $$A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1; \quad a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$$

sont des constantes convenablement choisies.

Puisque $y' = \dot{y}/\dot{x}$ l'équation (1) devient

(4) $(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\, \dot{y} = (B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, \dot{x} + (C_1 x + C_0)\, \dot{x} y + C \dot{x} y^2.$

Remplaçons dans l'équation (4) x, y donnés par (2) et ses dérivées. Nous obtenons ainsi une équation algébrique du cinqième degré en t, laquelle sera nommée: équation (D).

Pour que (2) soit une solution de l'équation (1), il faut et il suffit que le polynôme de l'équation (D) s'annulle identiquement. On obtient de cette manière les six équations eutre les coefficients (3). On peut dèterminer A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1 en fonction des a_k, b_k ($k = 0, 1, 2$).

L'équation (1) a des solutions particulières de la forme (2) das les cas suivants:

1.1. $a_2 b_2 \neq 0, \quad \alpha_{21} \neq 0$

$$A_2 = 2(a_2 C_1 + 2 b_2)/a_2, \quad B_2 = b_2 (a_2 C_1 + 3 b_2)/a_2^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{2a_2} \left\{ \left(4a_2 a_0 - 7a_1^2 - 10 \frac{b_2 a_1^3}{\alpha_{21}} \right) C_1 + 4a_2 C_0 - \frac{10 a_2 a_1^3}{\alpha_{21}} B_2 - \right.$$
$$\left. - \left(4a_0 a_2 - 4a^2{}_1 - \frac{10 b_2 a_1^3}{\alpha_{21}} \right) A_2 + 8a_2 b_0 - 4a_1 b_1 - 10 \frac{b_2 a_1^2 b_1}{\alpha_{21}} \right\},$$

$$B_1 = \frac{1}{2a_2^2} \left\{ \left(2a_2 b_2 a_0 - 2a_2^2 b_0 + 7a_2 a_1 b_1 + 2b_2 a_1^2 - \frac{10 a_2^2 a_1 b_1^2}{\alpha_{21}} \right) C_1 + \right.$$
$$+ 2a_2 b_2 C_0 + \left(4a_1 \alpha_{21} - 2a_2 a_1 b_1 + 10 \frac{a_2 b_2 a_1^2 b_1}{\alpha_{21}} \right) A_2 - \left(4a_2^2 a_0 + 4a_1^2 a_2 + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{10 a_2 b_2 a_1^3}{\alpha_{21}} \right) B_2 + 4a_2 b_2 b_0 - 2a_2 b_1^2 + 4b_2 a_1 b_1 - \frac{10 a_2 b_2 a_1 b_1^2}{\alpha_{21}} \right\},$$

$$-A_0=\frac{a_1^2}{2\alpha_{21}}(a_1b_0+b_1a_0)C_1+\frac{a_1^2b_1}{2\alpha_{21}}C_0+\left(a_0^2-\frac{a_1^2b_1a_0}{\alpha_{21}}\right)A_2+$$

$$+\frac{a_1^3a_0}{\alpha_{21}}B_2+\left(a_0-\frac{a_1^2b_1}{2\alpha_{21}}\right)A_1+\frac{a_1^3}{2\alpha_{21}}B_1+\frac{a_1^2b_1b_0}{\alpha_{21}},$$

$$-B_0=\left[a_0b_0+\frac{a_1b_1}{2\alpha_{21}}(a_1b_0+b_1a_0)\right]C_1+\left(b_0+\frac{a_1b_1^2}{2\alpha_{21}}\right)C_0-\frac{a_1b_1^2a_0}{\alpha_{21}}A_2+$$

$$+\left(a_0^2+\frac{a_1^2b_1a_0}{\alpha_{21}}\right)B_2-\frac{a_1b_1^2}{2\alpha_{21}}A_1+\left(a_0+\frac{b_1a_1^2}{2\alpha_{21}}\right)B_1+b_0^2+\frac{a_1b_1^2b_0}{\alpha_{21}},$$

C_0, C_1 sont des constantes arbitraires et $\alpha_{21}=a_2b_1-b_2a_1$;

1.2. $a_2b_2\neq 0$; $\alpha_{21}=0$,

$$A_2=\frac{1}{a_2b_2}(a_2^2B_2+a_2b_2C_1+b_2^2),$$

$$A_1=\frac{1}{2a_2b_2}\{2a_2^2B_1+(2a_2b_2a_0+3a_2a_1b_1+2a_2^2b_0+b_2a_1^2)C_1+$$

$$+2a_2b_2C_0-[2b_2(a_1^2+2a_2a_0)+2a_2a_1b_1]A_2+$$

$$+4a_2(a_1^2+a_2a_0)B_2+4a_2b_2b_0+2a_2b_1^2+2b_2a_1b_1\},$$

$$A_0=\frac{1}{2b_2}\{2a_2B_0+[2a_2a_0b_0+a_1(a_1b_0+b_1a_0)]C_1+(a_1b_1+$$

$$+2a_2b_0)C_0-2a_0(b_2a_0+a_1b_1)A_2+2a_0(a_2a_0+a_1^2)B_2-$$

$$-(2b_2a_0-a_1b_1)A_1+(2a_2a_0+a_1^2)B_1+2b_0(a_2b_0+a_1b_1)\},$$

B_0, B_1, B_2, C_0, C_1 sont des constantes arbitraires;

2. $a_2\neq 0$, $b_2=0$,

$$B_2=0,\ A_2=2C_1,\ B_1=[(a_1b_1-2a_2b_0)C_1-2b_1^2]/2a_2,$$

$$A_1=\frac{1}{a_2b_1}\{3a_2a_1B_1+(3a_2a_1b_0-2a_2b_1a_0-a_1^2b_1)C_1+$$

$$+2a_2b_1C_0+4a_2b_1b_0+a_1b_1^2\},$$

$$B_0=-\frac{1}{2a_2}\{[2a_2a_0b_0+a_1(a_1b_0-3b_1a_0)]C_1+(a_1b_1+2a_2b_0)C_0-$$

$$-a_1b_1A_1+(2a_2a_0+a_1^2)B_1+2b_0(a_2b_0+a_1b_1),$$

$$A_0=\frac{1}{b_1}\{a_1B_0+a_0(a_1b_0-2b_1a_0)C_1+a_1b_0C_0-b_1a_0A_1+a_1a_0B_1+a_1b_0^2\},$$

C_0, C_1 sont des constantes arbitraires;

3. $a_2 = b_2 = 0$,

$$A_2 = \frac{1}{a_1 b_1} (a_1 b_1 C_1 + b_1^2 + a_1^2 B_2),$$

$$A_1 = \frac{1}{b_1} \{(a_1 b_0 + b_1 a_0) C_1 + b_1 C_0 + 2b_1 b_0 - 2b_1 a_0 A_2 + 2 a_1 a_0 B_2 + a_1 B_1\},$$

$$A_0 = \frac{1}{b_1} \{a_1 B_0 + a_1 a_0 b_0 C_1 + a_1 b_0 C_0 + a_1 b_0^2 - b_1 a_0^2 A_2 + a_1 a_0^2 B_2 - b_1 a_0 A_1 + a_1 a_0 B_1\},$$

B_0, B_1, B_2, C_0, C_1 sont des coustantes arbitraires;

Aux cas indiqués dans ce qui précède correspondent respectivement les exemples suivants:

1.1 $(12 x^2 - 5 x - 3) y' = 8 x^2 - 8 x + (2 x + 4) y + y^2$

$$x = t^2 + t + 1$$

$$y = t^2 + 2t + 1$$

1.2. 1° $(4 x^2 - 4 x + 1) y' = x^2 + 2 xy + y^2$

$$x = 2t^2 + t + 1, \quad y = 2 t^2 + t$$

2° $(8 x^2 + 5 x + 2) y' = 4 x^2 + 2 + 2 xy + 2 y^2$

$$x = t^2 + t, \quad y = 2 t^2 + 2 t + 1$$

2. $(4 x^2 + x - 3) y' = - 2 x + (2 x + 1) y + y^2$

$$x = t^2 + t + 1$$

$$y = t + 1$$

3. $(4 x^2 - 1) y' = 2 x^2 + x - 1 + (x + 2) y + y^2$

$$x = t + 1$$

$$y = 2 t + 1.$$

Dans le Recueil [1] bien connu d'équations différentielles de Kamke on ne trouve pas les équations envisagées plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

1. Э. Камке: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1971.

2. I. A. Šapkarev: Sur une équation différentielle linéaire du second ordre, Publication de la Faculté d'electroteh. de l'Univ. a Belgrade, série math. et phys. No 74, 1962. 12—14.

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

ЗА ЕДНА RICCATI-ЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Резиме

Во овој труд се најдени релациите што треба да ги задоволуваат константите (3), па да равенката (1) има партикуларни интеграли од обликот (2).