ЗА ЕДНА КЛАСА НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

1. Нека е дадена линеарната диференцијална равенка

$$P_n y^{(n)}+P_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + P_m y^{(m)} + P_{m-1}\, y^{(m-1)} + \cdots + P_0 y = 0, \tag{1}$$

где што се $P_\nu = P_\nu(x)$ $(\nu = \overline{o, m-1})$-полиноми од степен ν $(P_\nu{}^{(\nu)} \neq 0)$, $P_k = P_k(x)$ $(k = \overline{m, n})$-произволни m-пати диференцијабилни функции на некој интервал.

Ќе покажеме дека равенката (1) има како општ интеграл полином од степен $n+m-1$ $(1 \leqslant m < n)$, ако и само ако важат релациите

$$\sum_{k=0}^{\min(m,i)} \binom{m}{k} P^{(k)}_{n-i+k} = 0 \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Во тој случај, сите функции $P_i(x)$ $(i = \overline{o.\ n})$ се полиноми, дадени како

$$P_i = c_{n-i}\, P_n{}^{(n-i)} \qquad (i = \overline{o,\ n-1}), \tag{3}$$

каде што $c_{n-k}(k = \overline{0, n})$ се константи определени со релациите

$$\sum_{k=0}^{\min(m,i)} \binom{m}{k} c_{i-k} = 0 \qquad (i = \overline{1, n};\ c_0 \equiv 1). \tag{4}$$

При тоа, за $m = 1$ излегува резултатот најден во [1].

2. Ако равенката (1) се диференцира m пати, се добива

$$\sum_{k=0}^{n-m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} y^{(n-k+m-i)} P^{(i)}_{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} y^{(k+m-i)} P^{(i)}_{k} = 0,$$

Последната равенка, после неколку елементарни трансформации, постанува

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\min(m,i)} \binom{m}{k} P^{(k)}_{n-i+k} \right) y^{(n+m-i)} = 0. \tag{5}$$

Очигледно е дека равенката (5) има партикуларен интеграл

$$y_1 = H_{m-1}(x) \tag{6}$$

каде што $H_{n-1}(x)$ е произволен полином од степен $m-1$. Ако равенката (1) има како општ интеграл полином од степен $n+m-1$, тогаш од (6) следи дека општиот интеграл на равенката (5) е исто така полином од степен $n+m-1$. Во тој случај важи $y^{(n+m)} = 0$, па равенката (5) постанува

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{m\,n}(m,i)} \binom{m}{k} P^{(k)}_{n-i+k} \right) y^{(n+m-i)} = 0. \tag{7}$$

Како равенката (7) е од ред $n+m-1$, а има $n+m$ линеарно независни партикуларни решенија, истата ке биде задоволена само ако важи (2). Обратно, ако важи (2), тогаш со m-тократно диференцирање на (1), се добива $y^{(n+m)}=0$. Оттука следи дека условот (2) е и доволен.

3. Ако важат релациите (2), тогаш непосредно се констатира дека сите функции $P_i(x)$ $(i=\overline{o, n})$ се полиноми. Со замена на (3) во (2), директно се добиваат релациите (4).

Према тоа, ако условите (2) се исполнети, тогаш равенката 1) припаѓа кон класата на равенки разгледувани во [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Šapkarev: Sur une équation différentielle linéaire d'ordre n dont la solution générale est un polynôme de n-ème degré, Математички весник 1 (16), 1964, 49—50.

2. M. Angelesco: Sur certaines équations différentielles complétement intégrables, Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Pariz 1921, t. 172, pp. 40-41.

3. Д. С. Митриновић, Д. Ж. Ђоковић: Допуне Камкеовом делу VII, Публ. Електротек. фак. унив. у Београду, сер. мат. и физ., № 82, 1962, 16-18.

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОТОРЫХ ОБЩИМ ИНТЕГРАЛОМ ЯВЛЯЕТСЯ ПОЛИНОМ

Резюме

В этой работе найдены необходимые и достаточные условия при которых линейное дифференциальное уравнение (1) имеет общим интегралом полином степени $n+m-1$ $(1 \leqslant m < n)$. При этом для $m=1$ получается результат, найденный в [1].