SUR LA VALEUR PRINCIPALE DE L'INTÉGRALE IMPROPRE

IV — ième note

D. Dimitrovski, J. Miteva

La question de l'éxistence de la valeur principale de l'intégrale impropre

$$\text{(1)} \qquad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

au cas où la fonction sous-intégrale ne possède que des pôles simples, est traitée dans la litterature classique [1], [2], [3], [4], [5].

Il n'y a que des annonces que la valeur de l'intégrale (1) éxiste dans des autres cas, mais on n'y trouve pas des théorèmes d'éxistence suffisament générales.

Dans la note présente, nous avons le but suivant: donner un critère suffisament large de l'éxistence des intégrales (1), au cas ou la fonction sous-integrale possède des pôles arbitraires.

Theoreme. 1° Soit $f(x)$ une fonction de la variable réele x, définie au long de toute l'axe des réels, éxeption faite d'un nombre fini de m pôles

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m$$

étant respectivement du rang

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_m$$

2° $f(x) = \sigma(1/x^2), \quad x \to \pm\infty$

3° $f(z)$ est une fonction analytique de la variable complèxe z, qui devient $f(x)$ ci-dessus citée, et qui possède, sauf les singularités dècrites sur l'axe des réels, des pôles et des singularités essentielles isolées.

Alors, pour que la valeur principale de l'intégrale (1) existe, il faut et il suffit que les sommes des coèficients laurentiens paires des membres $B_{k,\,2\mu}(z-x_k)^{-2\mu}$, les devellopements faites autour de chaque pole x_k, soient égaux à zero

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n_{k\mu}} B_{\nu,\,2\mu} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad 2\mu = 2, 4, \ldots n_{km}$$

La demonstration de ce théorème se fait par un procédé classique. A partir du devellopement laurentien autour de chaque pole x_k

$$f(z) = \frac{B_{k,\,n_k}}{(z-x_k)^{n_k}} + \frac{B_{k,\,n_k-1}}{(z-x_k)^{n_k-1}} + \cdots + \frac{B_{k,\,1}}{z-x_k} + A_{k,\,0} +$$
$$+ A_{k,\,1}(z-x_k)^1 + A_{k,\,2}(z-x_k)^2 + \cdots$$

on établi d'abord les valeurs des intégrales prises au long de demi-cercles entourant chacun des poles x_k: $z - x_k = re^{i\theta}$, se trouvant sur le plan supérieur, prises au sens direct: $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$:

$$\int\limits_{|z - x_k| = r} f(z)\, dz = \int_{\pi}^{0} f(x_k + re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, id\theta = \int_{\pi}^{0} \Bigg(\sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{B_{k,\nu}}{(z - x_k)^{\nu}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{+\infty} A_{k,\nu}(z - x_k)^{\nu} \Bigg) dz = \sum_{\nu=0}^{n_k} B_{k,\nu} \int_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\theta(1-\nu)}}{r^{\nu-1}}\, d\theta +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{+\infty} A_{k,\nu} \int_{\pi}^{0} r^{\nu+1}\, ie^{i(1+\nu)\theta}\, d\theta.$$

La seconde somme tend vers zero dans le procès $r \to 0$, ainsi qu'il nous reste

$$\int_{\pi}^{0} f(x_k + re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, id\theta = -\pi i B_{k,1} \cdot + \sum_{\nu=2}^{n_k} B_{k,\nu} \cdot \frac{1}{(1 - \nu)\, r^{\nu-1}} [1 - e^{i\pi(1-\nu)}]$$

Pour que la valeur reste limitée, si $r \to 0$, deux cas sont possibles:

1° $1 - e^{i\pi(1-\nu)} = 0$, c'-est-à-dire $\nu = 1 \pm 2n$
donc au cas des coèficients impaires;

2° au cas des coèficients paires, il ne nous reste que dans le procès des limites

$$\lim_{r \to 0} \sum_{k=1}^{m} \int_{\pi}^{0} f(x_k + re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, id\theta = -\pi i \sum_{z = x_k} Res f(z) -$$

$$- 2 \lim_{r \to 0} \sum_{\mu=1}^{l} \frac{1}{(2\mu - 1)\, r^{2\mu-1}} \sum_{\nu=1}^{n_{k,\mu}} B_{\nu,\, 2\mu}$$

une supposition de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n_{k_1}} B_{\nu,\,2} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n_{k_2}} B_{\nu,\,4} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n_{k_3}} B_{\nu,\,6} = 0, \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n_{kl}} B_{\nu,\,2l} = 0$$

c'-est-à-dire la condition (2). Cela veut dire que les conditions (2)—(3) sont nécessaires pour que l'intégrale (1) éxiste. Pour démontrer qu'elles sont suffisantes aussi, il faut les compter emplies, les remplacer dans un devellopement laurentien et calculer les intégrales. Le résultat est le même. Le théorème est démontré. Nous avons prevu ce résultat dans notre papier [7].

La somme des coèficients laurentiens sur les places paires nous parlant peu sur la nature de la fonction $f(z)$, on a besoin des critères plus immédiates de l'éxistence des intégrales impropres:

Corolaire I. Si $f(z)$ ne possède qu'un seul pôle sur l'axe des x, du rang quelconque, pour que la valeur principale de l'intégrale (1) éxiste, il faut que les coèficients du devellopement de Laurent sur les places paires soient égaux à zéro:

$$B_2 = 0, \quad B_4 = 0, \; B_6 = 0, \ldots, \; B_{2n} = 0.$$

Cela veut dire que $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{B_{2n-1}}{(z-x_k)^{2n-1}} + \frac{B_{2n-2}}{(z-x_k)^{2n-3}} + \ldots + \frac{B_1}{z-x_k} + \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_\nu (z-x_k)^\nu$$

En outrs, ce sont les seuls pôles du rang impaire qui peuvent avoir la valeur principale de l'intégrale, si les autres coèficients sur les places paires sont égaux à zéro.

Dans les conclusions suivantes $P(x)$ et $Q(x)$ présentent des polynômes avec les propriétés:

1° deg $Q(x) \geqq$ deg $P(x) + 2$,

2° $Q(x)$ ne possède pas des zéros réels.

Corolaire 2. La valeur principale de l'intégrale

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x-a)^{2n}\, Q(x)}\, dx, \text{ n'existe jamais.}$$

Corolaire 3. La valeur principale de l'intégrale au sens de Cauchy

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x-a)^{2n+1}\, Q(x)}\, dx$$

éxiste seulement si la fonction rationelle $R(z) = P(z)/Q(z)$ possède des propriétés

$$\left(\frac{P}{Q}\right)'_{z=a} = 0, \; \left(\frac{P}{Q}\right)''_{z=a} = 0, \ldots, \; \left(\frac{P}{Q}\right)^{(2n-1)}_{z=a} = 0.$$

Corolaire 4. La valeur principale v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{P(x)}{(x-a)^3\, Q(x)}\, dx$

éxiste, si $\dfrac{P'(a)}{Q'(a)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Corolaire 5. La galeur principale v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x-a)^3}\, dx$,

éxiste, si le polynôme $P(x)$ satisfie la condition $P'(a) = 0$.

Par exemple v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3 - 3ax^2}{(x-a)^3}\, dx$ existe.

Cololaire. 6. La valeur principale v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x-a)\,Q(x)}\,dx$ éxiste toujours, ce qui est bien connu.

Corolaire 7. Supposons que $f(x)$ possède deux pôles du rang arbitraire sur l'axe des réels. Pour qu'il existe la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale, il faut et il suffit que les sommes des coèficients correspondants des devellopements laurentiens sur les places paires soient égales à zéro

$$B_{1,\,2\nu} + B_{2,\,2\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Cela veut dire que la disposition symetrique des pôles n'est point nécessaire pour l'éxistence de la v. p.

Corolaire. 8. L'intégrale v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(x)}{(x-a)^2\,(x-b)^2}\,dx.$ existe au sens de la valeur pincipale, si $R(a) = -R(b)$; et plus specialement

L'intégrale v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(x)}{(x^2-a^2)^2}\,dx$ existe si $R(-a) = -R(a)$ (et le plus spécialement, si $R(x)$ est une fonction impaire).

On peut maintenant donner, d'une manière semblable, les conclusions relatives à des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+8} \frac{R(a)\,dx}{(x-a)^n\,(x-b)^m}$$

si l'on traduit les conclusions du théorème aux conditions des parametres n, m.

LITTERATURE

1. Фихтенгольц, Курс дифф. инт. исчислениях, I, II, Несобств, инт.
2. Whitaker—Watson, A cours of modern analysis, tome I, dept. Improper int.
3. Goursat, Cours d' Analyse, tome III.
4. D. S. Mitrinović: Calculus of residues.
5. Lindelof, Calcul des residus.
6. Гельфанд Вычежы.
7. D. Dimitrovksi, Sur la valeur principal de l'intégrale imporpre. I-iére note, God. Zb. PMF, Skopje, sekc. A, tome 21, 1971, pp. 5-12.

Резиме

Во трудов се дава општа теорема за егзистенција на нејсвојственият интеграл (1) во случај на повеќе полови од повисок ред, досега непозната во литературата.