ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ЕДНА СПЕЦИЈАЛНА КЛАСА ПОЛИНОМНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ОПЕРАТОРИ

Драган С. Димитровски, Петар Р. Лазов

Нека е даден диференцијалниот оператор

$$P(D) = D^{2n} + a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right), \tag{1}$$

каде што $a_i(x)$ $(i = \overline{o, n})$ се полиноми. Да претпоставиме дека операторот (1) може да се запише во облик

$$P(D) = (D^n + \alpha)\,(D^n + \beta), \tag{2}$$

каде што $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се исто така полиноми. Од условот за еднаковст на (1) и (2), лесно наоѓаме

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_0 - y), \quad \beta = \frac{1}{2}(a_0 + y), \tag{3}$$

$$a_{n-k} = \frac{1}{2}\binom{n}{k}(a_0 + y)^{(n-k)} \qquad k = \overline{1, n, - 1}, \tag{4}$$

каде што y е определено со равенката

$$y^2 - 2\,y^{(n)} = \Delta; \quad \Delta = a_0{}^2 + 2\,a_0{}^{(n)} - 4a_n\,. \tag{5}$$

ЛЕМА 1. Операторот (1) се факторизира на облик (2), ако и само ако (i) равенката (5) има барем едно полиномно решение $y = y(x)$; (ii) полиномите $a_{n-k}(x)$ $(k = \overline{1, n-1})$ се дадени со (4).

Равенката (5) може да има плиномни решенија, -само кога $dg\,\Delta$ е парен број. Полиномите S и Q ќе ги определиме како

$$\Delta = S^2 + Q, \quad S = [\sqrt{\Delta}], \tag{6}$$

каде што $[\sqrt{\Delta}]$ го означува полиномниот дел од развојот на $\sqrt{\Delta}$ по цели степени од x.

ЛЕМА 2. Нека е $dg\,\Delta$ парен број. Тогаш равенката (5) има полиномни решенија ако и само ако важи една од релациите

$$Q \pm 2\,S^{(n)} = 0. \tag{7}$$

Доказ: Ако (6) се замени во (5), се добива

$$y^2 - S^2 = Q + 2\,y^{(n)}.$$

Земајќи во обзир дека е $dg\,Q < dg\,S$, лесно се констатира дека последната равенка можат да ја задоволат само полиномите $y = \pm S$. Ако $y = \pm S$ го замениме во (5), со помош на (6) лесно се добива (7). Обратно, ако важи (7), тогаш

$$S^2 \pm 2S^{(n)} = S^2 + Q,$$

или, земајќи го во обзир (6): $S^2 \pm 2S^{(n)} = \Delta$. Тоа значи дека $y = \pm S$ е решение на (5), па доказот е завршен.

Од лемите 1 и 2 директно следи

ТЕОРЕМА. Нека е $dg\,\Delta$ парен број. Тогаш операторот (1) се факторизира на обликот (2) ако и само ако важи

$$(j) \qquad a_{n-k} = \frac{1}{2}\binom{n}{k}(a_0 \pm S)^{(n-k)} \qquad (k = \overline{1, n-1})$$

$$(jj) \qquad Q \pm 2S^{(n)} = 0.$$

Полиномите $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ притоа се дадени како

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_0 \mp S), \quad \beta = \frac{1}{2}(a_0 \pm S).$$

Ако $dg\,\Delta$ е непарен број, тогаш операторот (1) не може да има облик (2).

За $n = 1$ од теоремата излегуваат резултатите најдени во [1], а за $n = 2$ резултатите најдени во [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. D. Rainville: Amer. Math. Monthly, 48, 1941, 519—521.
2. П. Лазов, П. Анастасовски: Билтен на ТМФ, Скопје, 6 (2), 1975, 35—38.

Драган С. Димитровски, Петар Р. Лазов

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОГО СПЕЦИАЛНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Резюме

В этой работе найдены необходимые и достаточные условия при которых дифференциальный оператор (1) факторизуется в виде (2). При этом для $n = 1, 2$ получаются результаты, найденные в [1], соответственно [2].