ЗА S — ПОЛИНОМОТ

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

1. Ако полиномот $B(x)$ е од парен степен т.е.

$$B(x) = \sum_{k=0}^{2n} \beta_k x^k, \ \beta_{2n} \neq 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тогаш равенката $y' = y^2 - B(x)$ можат да ја задоволат само [1] полиномите: $y = \pm S = \pm [\sqrt{B}]$, каде што $[\sqrt{B}]$ го означува целиот рационален дел од развојот на $\sqrt{B(x)}$ по цели степени од x. Овој полином се наречува S-полином. Коефициентите $c_k (k = \overline{0, n})$ ќе ги дефинираме како

(A) $$S \equiv \left[\sqrt{\sum_{k=0}^{2n} \beta_k x^k} \right] = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Ќе покажеме дека за овие коефициенти важат рекурентните релации:

(Б) $$\underset{j=\overline{o,n}}{\beta_{2n-j}} = \begin{cases} c^2_{n-l} + 2 \sum_{k=0}^{l-1} c_{n-k} \, c_{n-2l+k}, & j = 2l \\ 2 \sum_{k=0}^{l} c_{n-k} \, c_{n-(2l+1)+k}, & j = 2l + 1. \end{cases}$$

2. Ќе претпоставиме дека е исполнето

(1) $$y_0' = y_0^2 - B_0,$$

каде што

$$y_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \ \ B_0 = \sum_{k=0}^{2n} \beta_k x^k.$$

Релациите (Б) се добиваат со изедначување на коефициентите испред степените $x^{2n-j} \, (j = \overline{o, n})$ од левата и десната страна на равенката (1). Нека се релациите (Б) точни за некои n. Да би (1) важела и за $n + 1$, треба да е

$$(y_0 + c_{n+1} x^{n+1})' - (y_0 + c_{n+1} x^{n+1})^2 = - B_0 - \beta_{2n+1} x^{2n+1} - \beta_{2n+2} x^{2n+2}.$$

За дополнителните членови што се јавуваат во последната равенка во однос на равенката (1), добиваме

(2) $$\begin{aligned} &(n + 1) \, c_{n+1} x^n - 2y_0 \, c_{n+1} x^{n+1} - c^2_{n+1} x^{2n+2} \Leftrightarrow - \\ &- \beta_{2n+1} x^{2n+1} - \beta_{2n+2} x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Нека е $j = 2l$, што не ја намалува општоста на доказот. Изразите за коефициентите што се наоѓаат испред членот x^{2n-j+2}, се добиваат од соодветните коефициенти испред степенот x^{2n-j} со замена $j \to j-2$ т. е. $l \to l-1$. Значи, факторот кој учествува во изрзот за $\beta_{2(n+1)-j}$, а кој е од „нултата" равенка (1), изнесува

$$c^2_{n-(l-1)} + 2 \sum_{k=0}^{(l-1)-1} c_{n-k}\, c_{n-2(l-1)+k} = c^2_{(n+1)-l} + 2 \sum_{k=0}^{(l-1)-1} c_{(n+1)-(k+1)} \times$$

$$\times\, c_{(n+1)-2l+(k+1)} = c^2_{(n+1)-l} + 2 \sum_{k=1}^{l-1} c_{(n+1)-k}\, c_{(n+1)-2l+k}\,.$$

Факторот пак, кој е определен од дополнителните членови (2), е

$$2c_{(n+1)-0}\, c_{(n+1)-j+0} = 2c_{n+1}\, c_{n+1-2l}\,.$$

Со собирање на последните два израза, се добива

$$c^2_{(n+1)-l} + 2 \sum_{k=0}^{l-1} c_{(n+1)-k}\, c_{(n+1)-2l+k}\,. \tag{3}$$

Од (3) и од коефициентите испред x^{2n+1} и x^{2n+2} во (2), следи

$$\beta_{2(n+1)-j} = c^2_{(n+1)-l} + 2 \sum_{k=0}^{l-1} c_{(n+1)-k}\, c_{(n+1)-2l+k}\,, \qquad j = 2l.$$

Како релациите (Б) се точни за $n = 1$, со ова доказот е завршен.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. D. Rainville: Amer. Math. Monthly, 43, 1936, 473—476.

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

ОБ S ПОЛИНОМЕ

Резюме

В работе показывается, что для коэффициентов S-полинома, определенного с (A), справедливы рекурентные соотношения (Б).