РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ КЛАСИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД II РЕД СО МЕТОД НА ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Драган С. Димитровски, Петар Р. Лазов

1. Нека е дадена диференцијалната равенка

$$(1) \qquad (x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, y'' + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\, y' + b_0 y = 0,$$

каде што се B_2, B_1, B_0, a_2, a_1, a_0, b_0 — константи. Диференцирајќи ја равенката (1) n пати, добиваме:

$$\begin{gathered}(x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, y^{(n+2)} + [(a_2 + 3n)\, x^2 + (a_1 + 2n\, B_2)\, x + \\ + (a_0 + nB_1)]\, y^{(n+2)} + \{ [2\, a_2\, n + 3n\,(n - 1)]\, x + \\ + [b_0 + na_1 + n\,(n-1)\, B_2]\}\, y^{(n)} + n\,(n-1)\,(a_2 + n - 2)\; y^{(n-1)} = 0.\end{gathered}$$

Нека е $-a_2 = k$ $(k = -1, 0, 1, 2, \ldots)$; тогаш земајќи $n = 2 - a_2$ и ставајќи $y^{(n)} = z$, равенката (1) ја сведуваме на облик

$$\begin{gathered}(x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\; z'' + \{(6 - 2\, a_2)\, x^2 + [a_1 + 2\,(2 - a_2)\, B_2]\, x + \\ (2) \quad + [a_0 + B_1\,(2 - a_2)]\}\; z' + [(2 - a_2)\;(3 - a_2)\, x + \text{б}_0 + a_1\;(2 - a_2) + \\ + B_2\,(2 - a_2)\;(1 - a_2)]\; z = 0.\end{gathered}$$

Ако една од равенките (1) или (2) е интеграбилна со квадратури, тогаш истото тоа важи и за другата. Како пример ќе ја разгледаме равенката [2, ч., III, 2.338]

$$(3) \qquad \left(x^3 - \frac{2}{9}\, x^2\right) y'' + \left(-2\, x^2 + \frac{x}{3}\right) y' - \frac{1}{3}\, y = 0,$$

интеграбилна со квадратури. Како е $-a_2 = 2$, тоа на равенката (3) и одговара следната равенка од типот (2):

$$\left(x^3 - \frac{2}{9}\, x^2\right) z'' + \left(10\, x^2 - \frac{13}{9}\, x\right) z' + \left(20\, x - \frac{5}{3}\right) z = 0.$$

Последната равенка има еден партикуларен интеграл

$$z_1 = \frac{d^4}{dx^4}\, (9x^2 - 2x)^{3/2}.$$

2. Ако равенката

$$(4) \qquad (x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\; y'' + (a_1 x + a_0)\; y' + (b_1 x + b_0)\; y = 0$$

ја диференцираме n пати, ако претпоставиме дека условот

$$\text{(5)} \qquad -b_1 = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

е исполнет, ако означиме $y^{(n)} = z$ и ако земеме $n = l + 2$, тогаш равенката (4) се сведува на облик

$$(x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\; z'' + [(l+2)\;(3\,x^2 + 2\,B_2\,x + B_1) + a_1\; x + a_0]\, z' +$$

$$\text{(6)} \quad + [2\,(l+1)\;(l+3)\,x + b_0 + a_1\,(l+2) + B_2\,(l+1)\;(l+2)]\; z = 0.$$

Ако една од равенките (4) или (6) е интеграбилна со квадратури, тогаш истото тоа важи и за другата, како и обратното. Ова нешто ќе го примениме на неколку конкретни примери, дадени во [2].

Равенката [2, ч. III, 2.319]

$$\text{(7)} \qquad (x^3 + 2\,x)\; y'' - y' - 6\,xy = 0$$

е интеграбилна во затворен облик. Како е овде (5) исполнето ($l = 2$), тоа на равенката (7) и одговара следната равенка од типот (6):

$$(x^3 + 2\,x)\; z'' + (12\,x^2 + 7)\; z' + 30\,xz = 0.$$

Општото решение на последната равенка е дадено како $z = y_1^{IV}$, каде што y_1 е општо решение на равенката $x\,(x^2+2)\; y' - 3\;(x^2+1)\; y = c$ ($c =$ const.).

Равенката [2, ч. III, 2.304]

$$\text{(8)} \qquad x^3\,y'' + xy' - (2\,x + 3)\; y = 0$$

интеграбилна е во затворен облик. Како е овде $l = 1$, тоа на равенката (8) и одговара следната равенка од типот (6):

$$x^3\,z'' + (9\,x^2 + x)\; z' + 16\,xz = 0 \quad \text{т.j.} \quad x^2\,z'' + (9\,x + 1)\; z' + 16\; z = 0.$$

Према тоа, последната равенка има еден партикуларен интеграл

$$z_1 = \frac{1}{x^4}\exp(1/x)\cdot\left(6 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

3. Равенката $y'' + (a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0)\; y' + (b_1\,x + b_0)\; y = 0$ е разгледувана во [1].

4. Нека е дадена диференцијалната равенка

$$\text{(9)} \qquad (x + B_0)\; y'' + (a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0)\; y' + (b_1\,x + b_0)\; y = 0,$$

каде што се B_0, a_2, a_1, a_0, b_1, b_0-константи ($a_2 \neq 0$). Диференцирајќи ја равенката (9) n пати, претпоставувајќи дека е $-\,b_1/a_2$ природен број или нула, земајќи $n = 1 - a_2^{-1} b_1$ и означувајќи $y^{(n)} = z$, истата ја сведуваме на облик:

$$(10) \quad (x + B_0) z'' + \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + 1 - \frac{b_1}{a_2}\right) z' + \left[(2a_2 - b_1) x + + b_0 + a_1 \left(1 - \frac{b_1}{a_2}\right)\right] z = 0.$$

Равенките (9) и (10) се од ист тип, па ако е едната од нив интергабилна во затворен облик, истото важи и за другата, како и обратно.

Така на пример равенката [2, ч. III, 2. 121]

$$(11) \quad xy'' + (-x^2 + x) y' + (x - 1) y = 0,$$

интеграбилна е со квадратури. На (11) и одговара следната равенка од типот (10): $xz'' + (-x^2 + x + 2) z + (-3x + 1) z = 0$, чиј еден партикуларен интграл е $z_1 = 2u + xu'$, $u = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(\dfrac{1}{2} x^2 - x\right)$.

5. Ако равенката

$$(12) \quad (x^2 + B_1 x + B_0) y'' + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) y' + (b_1 x + b_0) y = 0$$

ја диференцираме n пати, ако претпоставиме дека е $-b_1/a_2$ нула или природен број, акоземеме $n = 1 - \dfrac{b_1}{a_2}$ и ако означиме $y^{(n)}$, добиваме:

$$(13) \quad (x^2 + B_1 x + B_0) z'' + \left\{a_2 x^2 + \left[a_1 + 2\left(1 - \frac{b_1}{a_2}\right)\right] x + a_0 + B_1 \left(1 - \frac{b_1}{a_2}\right)\right\} z' + + \left[(2a_2 - b_1) x + b_0 + a_1 \left(1 - \frac{b_1}{a_2}\right) - \frac{b_1}{a_2}\left(1 - \frac{b_1}{a_2}\right)\right] z = 0.$$

Овој резултат ќе го примениме на два конкретни примера, дадени во [2].

а) $\quad x^2 y'' + (-x^2 + x) y' + (x - 1) y = 0.$ [2. ч. III, 2. 196]

На оваа равенка и одговара следната равенка од типот (13):

$$x^2 z'' + (-x^2 + 5x) z' + (-3x + 3) z = 0.$$

Едно партикуларно решение на последната равенка е $z_1 = e^x (x^{-2} - x^{-3})$.

б) $\quad x^2 y'' - 2x(x + 1) y' + 2(x + 1) y = 0.$ [2. ч. III, 2.202]

На оваа равенка и одговара следната равенка од типот (13):

$x^2 z'' + (-2x^2 + 2x) z' - 6xz = 0$ т.е. $xz'' - 2(x - 1) z' - 6z = 0$,

чиј еден партикуларен интеграл е $z_1 = e^{2x}(1 + x)$.

6. Нека е дадена диференцијалната равенка

$$(14)\quad (x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, y'' + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\, y' + (b_1 x + b_0)\, y = 0,$$

каде што се B_2, B_1, B_0, a_2, a_1, a_0, b_1, b_0-константи. Ќе претпоставиме дека важи

$$(15)\qquad (l + 1)\, a_2 + b_1 = -(l^2 + l); \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Ако равенката (14) ја диференцираме n пати, ако земеме $n = l + 2$ и ако означиме $y^{(n)} = z$, тогаш се добива следната равенка:

$$\begin{aligned} & x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, z'' + \{[a_2 + 3\ (l + 2)]\ x^2 + [a_1 + 2\ (l + 2) B_2]\, x + \\ (16)\quad & + a_0 + (l + 2) B_1\}\ z' + \{[3\ (l + 2)\ (l + 1)\ +\ 2\, a_2\ (l + 2)\ b_1]\ x + \\ & + B_2 (l + 2)\ (l + 1)\ +\ a_1\ (l + 2) + b_0\}\ z = 0. \end{aligned}$$

Равенките (14) и (16) се од ист тип, па ако едната од нив е интеграбилна во затворен облик, истото тоа важи и за другата, како и обратно.

Како пример ќе ја земеме равенката [2, ч. III, 2. 312]

$$(17)\qquad x\,(x^2 + 1)\ y'' + 2\,(x^2 - 1)\ y' - 2\,xy = 0,$$

интеграбилна со квадратури. На равенката (17) и одговара следната равенка од типот (16): $x\,(x^2 + 1)\ z'' + 8\,x^2 z' + 12\,x\,z = 0$, чие општо решение е дадено како $z = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{c_1 + c_2\,x^3}{1 + x^2}\right)$.

Равенките [2, ч. III: 2. 309, 2.311, 2.316, 2.315a, 2. 321] се од обликот (14). За сите нив условот (15) е исполнет ($l = 0$; $n = 2$). Кон сите нив може да се примени пред малку добиениот резултат.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Mitrinovitch: Publ. Elektroteh. fak., ser. mat. i fiz., No 27, 1959, 1—4.
2. Э. Камке: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1971.

Драган С. Димитровски, Петар Р. Лазов

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Резюме

В этой работе с применением простого метода дифференцирования получены некоторые критерии интегрируемости некоторых, классов линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами.