ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ КЛЕРО

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

1. Пусть даётся дифференциальное уравнение

$$A(x)\ y = \sum_{k=0}^{n} B_{\nu_k}(x)\,(y^{(r)})^{\nu_k}, \quad y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r},$$

$$(E) \qquad o \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n,\ \nu_n \geqslant 2,\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $A(x)$, $B_{\nu_k}(x)$ $(k = \overline{o, n})$ — полиномы степени a, соответственно b_{ν_k}. Если $\nu_0 \neq 0$, тогда ни один полином с свойством $y^{(r)} = 0$ (кроме тривиального случая $y = 0$) не может быть решением уравнения (E). Если же $\nu_0 = 0$, тогда полиномиальные решения уравнения (E) с свойством $y^{(r)} = 0$ определяются соотношением $Ay = B_0$. Предположим, что

$$(1) \qquad y^{(r)} \neq 0.$$

Предположим, что некоторый полином $y = y(x)$ с степенью m, который обладает свойством (1), является решением уравнения (E) Тогда выражение на левой стороне (E) становится полиномом степени $a + m$, а к-ый член в сумме на правой стороне того же уравнения становится полиномом степени $b_{\nu_k} + \nu_k(m - r)$. Отсюда, также как в [1], для возможных значений числа m находим

$$(2) \qquad m = \frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} + r \qquad (i = \overline{o, n-1};\ j > i),$$

$$(3) \qquad m = \frac{a + r\nu_k - b_{\nu_k}}{\nu_k - 1} \qquad (k = \overline{o, n};\ \nu_k \neq 1).$$

Если $\nu_k = 1$ $(k = 0$ или $k = 1)$, тогда возможны и такназываемые особые экспоненты, определяемые как целые положительные корни уравнения

$$(4) \qquad m(m-1)\ldots(m-r+1) = \alpha/\beta_1.$$

Здесь α и β_1 являются коэффициентами членов с степенью a и b_1 полиномов A и B_1.

ТЕОРЕМА 1. Множество чисел m, определенных соотношениями (2), (3) и (4), представляет все возможные значения степеней полиномиальных решений уравнения (E).

Как известно [2], уравнение (4) не может иметь больше чем один целый положительный корень, и тогда справедливо

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение (E) не может иметь больше чем $n + 1$ полиномиальных решений с различными степенями.

2. Найдем необходимые и достаточные условия существования полимиальных решений уравнения (E). При этом предположим, что число m даётся только одним из соотношений (2). Также как и в [3], показывается, что это предположение включает в себя следующие условия

$$a + r < \frac{(\nu_j - 2)\, b_{\nu_i} + (2 - \nu_i)\, b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \tag{5}$$

$$b_{\nu_k} < \frac{(\nu_j - \nu_k - 1)\, b_{\nu_i} + (\nu_k + 1 - \nu_i)\, b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \qquad (k = \overline{o, n};\ k \neq i, j). \tag{6}$$

Полиномы S и Q определим как

$$-B_{\nu_i} = B_{\nu_j} S^q + Q \qquad (q = \nu_j - \nu_i), \tag{7}$$

где S— представляет полиномиальную часть разложения $\sqrt[q]{-B_{\nu_i}(x)/B_{\nu_j}(x)}$ по целым убывающим степеням x. Как известно [1]

$$dg\, Q < b_{\nu_j} + (q - 1)\ dg\, S. \tag{8}$$

Полином H определим как

$$H = \omega_t\, I^r\, S + \sum_{k=0}^{r-1} c_k\, x^k, \tag{9}$$

где $c_i\ (i = \overline{0, r - 1})$ — произвольные константы, $\omega_t\ (t = \overline{1, q})$ — корни уравнения $\omega^q = 1$, а оператор I определяется как

$$I\, x^k = x^{k+1}/(k + 1).$$

Пусть полином $y = y(x)$, чей показатель степени только один из чисел (2), является решением уравнения (E). На оснований (7), получается

$$Ay = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i,\, j}}^{n} B_{\nu_l}\ (y^{(r)})^{\nu_l} - Q(y^{(r)})^{\nu_i} + B_{\nu_j}(y^{(r)})^{\nu_i}\{(y^{(r)})^q - S^q\}. \tag{10}$$

Из (5), (6) и (8), таким же способом как и в [1]. получается

$$\max\{dg\,(Ay),\ dg\,(B_{\nu_k}\,(y^{(r)})^{\nu_k})\ (k = o, n;\ k \neq i, j),\ dg\,(Q(y^{(r)})^{\nu_i})\} <$$

$$< dg\,\{B_{\nu_j}(y^{(r)})^{\nu_j - 1}\}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что уравнение (10) может иметь только такие полиномиальные решения, для которых справедливо $y^{(r)} = \omega_t S\ (t = \overline{1. q})$, Это значит, что только функции (9) могут быть полиномиальными решениями уравнения (E). Значит, если предположит что число m даётся только одним из соотношений (2), тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. Диференциальное уравнение (E) имеет полиномиальные решения с свойством (1) тогда и только тогда, когда для некоторого $1 \leqslant t \leqslant q = \nu_j - \nu_i$ существуют константы $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ такие, что справедливо:

$$A\,(\omega_t\, I^r S + \sum_{k=0}^{r-1} c_k\, x^k) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i,\, j}}^{n} B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l} - Q\,(\omega_t\, S)^{\nu_i}. \tag{12}$$

Этими решениями являются только функции (9).

Доказательство: Если предположим, что (9) является решением уравнения (E), тогда с помощью (7) легко получается (12). Если же, справедливо (12), тогда

$$AH = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i,\, j}}^{n} B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l} + (\omega_t\, S)^{\nu_i}\,\{-Q - B_{\nu_j}(\omega_t S)^q\} + B_{\nu_j}(\omega_t S)^{\nu_j}$$

или, на основании (7),

$$AH = \sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(\omega_i\, S)^{\nu_l} \qquad \text{т.е.}\quad AH = \sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}\{H^{(r)}\}^{\nu_l}.$$

Отсюда следует, что (9) является решением уравнения (E). Так как это единственно возможные полйномиальные решения того же уравнения, доказательство закончено.

ПРИМЕР. Для уравнения

$$6\,y = x^6 + x^3 + x^2 + 12 + 5\,xy'' - x^3\,(y'')^3, \tag{13}$$

$$\nu_i = 0,\ \nu_j = 3,\ q = 3,\ b_{\nu_i} = 6,\ b_{\nu_j} = 3,\ m = 3,\ r = 2.$$

$$S = [\sqrt[3]{(x^6 + x^3 + x^2 + 12)/x^3}] = x,\ \ Q = -x^3 - x^2 - 12,$$

и соотношение (12) имеет вид

$$6\left(\frac{x^3}{6} + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0\right) = x^3 + x^2 + 12 + 5\omega_t\, x^2,$$

что представляет тождество при $c_2 = 1, c_1 = 0,\ c_0 = 2, \omega_t = 1$. Уравнение (13) имеет одно полиномиальное решение: $y = \dfrac{x^3}{6} + x^2 + 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Лазов, Д. С. Димитровски: Годищен Зборник на ПМФ, Скопје, Кн. 25—26, 1975/76 93—99.
2. А. З. Самуйлов: Дифференц. уравн., 7 (12), 1971, 2287—2289
3. П. Р. **Лазов:** Об одной теореме Л. Г. Орешенко (во печат).

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

ЗА ЕДНА ОБОПШТЕНА КЛЕРОВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Резиме

Во овој труд најнапред се најдени сите можни вредности за степените на полиномните решенија на диференцијалната равенка (E). Потоа се најдени потребните и доволни услови за егзистенција на полиномни решенија на истата равенка; овие решенија се определени и експлицитно..