SUR LE METHODE LAPLACIEN APPLIQUE AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES • ∀UX COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

— **Première Note** —

Miloje Rajović, Dragan Dimitrovski, Petar Lazov

Idèe principale. On entrevoi que l'équation différentielle de l'ordre n, dont les coefficients sont des polynômes du degrés $k_\nu \leqq n$, c'est à dire

$$(1)\qquad \left(\sum_{i=0}^{k_n} a_i x^{k_n - i}\right) y^{(n)} + \left(\sum_{i=0}^{k_{n-1}} b_i\, x^{k_{n-1}-i}\right) y^{(n-1)} + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{k_1} c_i x^{k_1 - i}\right) y = 0$$

possède quelques propriétés semblables avec l'équation laplacienne simple avec des coefficients linéaires:

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i\, x)\; y^{(n-i)} = 0$$

C'est pourquoi nous allons chercher dans nos notes suivantes les solutions particulières des équations (1) sous la forme d'une intégrale définie

$$(3)\qquad y_p(x) = \int_\alpha^\beta e^{tx}\, \varphi_{(t)}\, dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction indéterminée, qui sera soumise à des conditions souplémentaires. Les α, β sont les limites d'intégration arbitraires, que l'on doit élire de façon que (3) satisfait (1).

Cas de l'équation du second ordre avec les coefficients polynômes de second degrés.

L'équation différentielle

$$(4)\quad (a_0 + b_0\, x + c_0\, x^2)\; y'' + (a_1 + b_1\, x + c_1\, x^2)\;\; y' + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, y \;\; = 0$$

dans un voisinage du point $x = 0$ est approchée à une équation simple de Laplace

$$\sum_{i=0}^{2} (a_i + b_i\, x)\; y^{(2-i)} = 0.$$

C'est pourquoi nous chercherons une intégrale particulière de l'équation (4) sous la forme d'une intégrale définie (3) avec parametre:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{tx} \varphi_{(t)}\, dt,\;\; y' = \int_\alpha^\beta t\, e^{xt}\, \varphi_{(t)}\, dt,\;\; y'' = \int_\alpha^\beta t^2\, e^{tx}\, \varphi_{(t)}\, dt;$$

la fonction $\varphi_{(t)}$, les α, β restant libres au sens de l'idée principale. Un changement dans l'équation nous donne les conditions:

$$R\varphi'' + (2R' - Q)\varphi' + (R'' - Q' + P)\varphi = 0 \tag{5}$$

$$[(Q\varphi - (R\varphi)' + xR\varphi)\, e^{tx}]_{\alpha}^{\beta} = 0 \tag{6}$$

dont la première nous détermine $\varphi_{(t)}$, et la seconde les limites α, β. P, Q, R étant détermines au moyen des coefficients donnés a_i, b_i, c_i de façon:

$$\begin{aligned} P &= a_0 t^2 + a_1 t + a_2 \\ Q &= b_0 t^2 + b_1 t + b_2 \\ R &= c_0 t^2 + c_1 t + c_2 . \end{aligned} \tag{7}$$

L'équation (5) étant du même type que (4), c'est à dire du type Laplacien, nous allons chercher les classes des intégrales de (5) permettant une forme fermée. Cherchons donc deux intégrales particulières φ_1 et φ_2 sous une condition générale qu'il éxiste entre eux une liaison de la forme:

$$\varphi_1 = f(\varphi_2) \tag{8}$$

f étant une fonction arbitraire. Par un changement nous obtenons la condition

$$\frac{f''(\varphi_2)\cdot\varphi_2'^2}{f(\varphi_2) - f'(\varphi_2)\cdot\varphi_2} = -\frac{R'' - Q' + P}{R} = \Psi_{(t)} = \text{fonction connue} \tag{9}$$

dans la forme d'une équation différentielle indéterminée, qui permet la solution de la forme fermée dans des nombreux cas particuliers. Celle-ci nous sera la base dans les recherches continues. Déterminant les φ_1, φ_2 nous avons tout de suite deux intégrales particulières de (4), où les α, β sont élus de façon que (6) soit satisfait. Ainsi on peut obtenir la solution générale de (4) dans la forme d'intégrale définie

$$y(x) = C_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_1(t)\, e^{tx}\, dt + C_2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_2(t)\, e^{tx}\, dt. \tag{10}$$

Exemple 1. Si l'on pose

$$\varphi_1 = \ln \varphi_2$$

on obtient de (9):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 + \frac{1}{4}\left(C_1 \pm \int \sqrt{\frac{R'' - Q' + P}{R}}\, dt\right)^2 \\ \varphi_2 &= e^{1 + \frac{1}{4}\left(C_1 \pm \int \sqrt{\frac{R'' - Q' + P}{R}}\, dt\right)^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour résoudre l'intégrale elliptique de second ordre

$$\int \sqrt{\frac{R'' - Q' + P}{R}}\, dt = \int \sqrt{\frac{a_0 t^2 + t\,(a_1 - 2\,b_0) + a_2 - b_1 + 2\,c_0}{c_0\, t^2 + c_1 t + c_2}}\, dt$$

nous allons spécialiser avec les conditions suplémentaires:

$$a_2 - b_1 + 2\,c_0 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Cela veut dire que l'équation différentielle

$$\left(a_0 + b_0\, x + \frac{b_1 - a_2}{2}\, x^2\right) y'' + (a_1 + b_1\, x + c_1\, x^2)\; y' + (a_2 + b_2\, x)\; y = 0$$

permet une solution sous la forme (3), (10), avec (11).

Plus spécialement, pour présenter la largeur de la methode, nous pouvons prendre encore

$$c_0 = 0, \quad \text{ce qui implique} \quad a_2 = b_1.$$

On obtient de cette facon

$$(12) \qquad \varphi_1(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(C_1 \pm \frac{2c_1}{3a_0}\left(\frac{a_0}{c_1}\, t + \frac{a_1 - 2b_0}{c_1}\right)^{3/2}\right)^2.$$

La condition relative aux limites

$$[Q\varphi - (R\varphi)' + x\, R\varphi]\; e^{tx}\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = 0$$

est évidement satisfaite si $t = \alpha = -\infty$, aussi que pour les zéros de la fonction Q (R étant 0 si $t = 0$). Comme $Q\,(t = 0) = b_2$, il faut mettre encore une condition supplémentaire:

$$b_2 = 0$$

Nous povons constater:

L'Équation différentielle

$$(a_0 + b_0\, x)\; y'' + (a_1 + b_1\, x + c_1\, x^2)\;\; y' + a_2\; y = 0$$

a une intégrale particulière

$$y_p\,(x) = \int_0^{-\infty} \varphi_1\,(t)\;\; e^{tx}\, dt$$

avec φ_1 donnée par (12).

Exemple 2. Si l'on précise dans (9) la fonction f sous la supposition

$$\varphi_1 = \varphi_2^2,$$

on peut résoudre (9) et de même (5). Nous obtenons aux quadratures

$$\varphi_2 = C_1 \cdot \exp \int \left[-\frac{2R' - Q}{2\,R^2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{2R^2} \sqrt{4R'^2 - 4R'Q + Q^2 - 2R^3R'' + 2R^3Q' + 4R^2R'' - 4R^2\,Q + 2R^2R'} \right] dt$$

Exemple 3. Si dans (9) on suppose

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = k^2, \quad k = \text{const.}$$

on a un résultat intéressant

$$\varphi_2 = K \cdot \sin\left(\pm \int \sqrt{\frac{R'' - Q' + P}{R}}\, dt + C_1 \right), \; \varphi_1 = \pm K \cos\left(\pm \int + C_1 \right)$$

Милоје Рајовиќ, Драган Димитровски, Петар Лазов

ЗА ЛАПЛАСОВАТА МЕТОДА ПРИМЕНЕТА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

I-ва нота

Р е з и м е

Методата на Лаплас за решавање на диференцијални равенки со помош на определен, а специјално и несвојствен интеграл, во трудов се пренесува на линиарни равенки со полиномни коефициенти. Ќе покажува дека ваквото проширување на Лапласовата метода е можно и дека ветува резултати.