NOTE SUR LES INTEGRALES TRIGONOMETRIQUES

Dragan S. Dimitrovski

On connait plusieurs méthodes (voir p.e. [1], p. 192) pour calculer les intégrales définies de la forme

$$(1) \qquad I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

R étant une fonction rationelle de $\sin x$ et $\cos x$. Ce problème peut être réduit à un calcul des résidus sur l'intégrale

$$(2) \qquad \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz},$$

prise au long du cercle-unité dans quelle région la fonction sous le signe de l'intégrale reste de nouveau rationelle, cette fois par rapport à z. Partant

$$(3) \qquad I = 2\pi \sum_{|z|<1} Res\left\{\frac{1}{z} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\right\}.$$

L'intégration au long d'un contour fermé est faite possible ici à cause d'une élection spécialisée des limites de l'intégration $[0, 2\pi]$.

Dans cette note nous allons poser le problème plus général : calculer l'intégrale définie, prise entré les limites arbitraires, qu'on rencontre souvent dans la pratique, au moyen d'un calcul des résidus:

$$(4) \qquad I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

R étant une fonction rationelle de ses arguments. Hors des méthodes classiques (primitive), nous n'avons rencontré dans la litterature qu'un seul abord semblable de la question au cas général pour $I(\alpha, \beta)$ ([2], [3]).

Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. 1°. R étant une fonction rationelle de sin x, cos x,

2°. qui ne posède pas les singularités réelles sur l'intervalle de l'intégration,

3°. et qui ne possède également les singularités complêxes sur les démi-droites $x = \alpha$, $0 \leqslant y < +\infty$ et $x = \beta$, $0 \leqslant y < +\infty$,

4°. α, β étant réels et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$,

alors les intégrales de la forme (5) sont représentables et calculables d'une somme finie des résidus des certaines fonctions analytiques, et leur valeur est donnée par les formules (10) et (11).

Pour démonfrer cette assertion, paralellement avec I, nous considerons les intégrales:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sin x \cdot R(\sin x, \cos x)\, dx, \qquad C = \int_{\alpha}^{\beta} \cos x \cdot R(\sin x, \cos x)\, dx$$

avec leur combinaison:

$$J = C + i\,S = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ix} R(\sin x, \cos x)\, dx =$$

$$(5) \qquad = \int_{\alpha}^{\beta} R\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}, \quad \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) dx.$$

Par un changement de la variable

$$(6) \qquad x = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\, t$$

l'intervalle de l'intégration $[\alpha, \beta]$ de l'axe x des réels se transforme sur l'intervalle $[0,2\pi]$ de l'axe des t des réels, ainsi qu'on a pour l'intégrale (5);

$$J = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{i\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2\pi}t\right)} R\left[\frac{e^{i\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2\tau}t\right)} - e^{-i\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2\pi}t\right)}}{2\,i}, \right.$$

$$\left. \frac{e^{i\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2\pi}t\right)} + e^{-i\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2\pi}t\right)}}{2}\right] dt$$

Un nouveau changement de la variable t:

$$(7) \qquad e^{i\frac{\beta-\alpha}{2\pi}} = z$$

transforme l'intervalle $[0,2\pi]$ de l'axe Ot sur un arc du cercle-unité dans le plan des complêxes déterminé par

$$(8) \qquad |z| = 1, \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \beta - \alpha$$

Alors l'intégrale (5) reprend la forme:

$$(9) \qquad J = \frac{e^{i\alpha}}{i} \int_{1}^{e^{(\beta-\alpha)i}} R\left[\frac{e^{i\alpha} z - (e^{i\alpha} \cdot z)^{-1}}{2i}, \quad \frac{e^{i\alpha} z + (e^{i\alpha} z)^{-1}}{2}\right] dz$$

R étant de même une fonction rationelle, cette fois rapport à z. Introduisons maintenant une intégration complêxe de la fonction R au long d'un contour fermé, qui est composé d'un secteur du cercle $|z| = 1$, dont l'arc est ci-dessus cité par (8), et ces côtés étant les radius:

$$\arg z = 0, \ 0 \leqslant |z| = x \leqslant 1, \text{ et } \qquad \arg z = \beta - \alpha, \ 0 \leqslant |z| \leqslant 1.$$

On peut vérifier facilement à partir des transformations (6) et (7) les faits suivants:

1°. tous les singularités complêxes $A + iB$ de la fonction R se trouvant dans le quadrangle infini $\alpha < A < \beta$, $B > 0$ se transforment dans l'intérieur du secteur.

2°. en déhor du secteur sortent les images de tous les singularités $A + iB$ de la fonction R, pour lesquelles il vaut $\alpha < A < \beta$, $B < 0$, aussi celles pour lesquelles $\beta < A < \alpha + 2\pi$, B étant arbitraire.

3° sur la ligne L de l'intégration, c'est-à-dire sur la frontière du secteur, ne se trouvent que les images de $A + iB$, pour lesquelles on a $A = \alpha$, $B > 0$ ou $A = \beta$, $B > 0$. Car il n'y a pas, suivant la supposition, aucune singularité de R parmi les dernières, une intégration régulière sur le contour cité est assurée.

Le théorème de Cauchy sur les résidus appliqué sur la fonction sousintégrale de (9, sur le secteur L cité, nous donne

$$J + \frac{e^{i\alpha}}{i} \int_0^1 R(\alpha, x)\, dx - \frac{e^{i\beta}}{i} \int_0^1 R(\beta, x)\, dx =$$

$$= 2\pi\, e^{i\alpha} \sum_{|z|=1,\, 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha - \beta} Res\, R(\alpha, z),$$

d'où on a

$$J = \int_\alpha^\beta e^{ix} R(\sin x, \cos x)\, dx =$$

(10)

$$= 2\pi\, e^{i\alpha} \sum_{|z| = 1,\, 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha - \beta} Res\, R(\alpha, z) + i \int_0^1 [e^{i\alpha} R(\alpha, x) - e^{i\beta} R(\beta, x)]\, dx.$$

La formule obtenue (10) réduit l'intégrale d'une fonction rationelle de cosx, sin x, à l'intégrale d'une fonction rationelle de x entre les limites [0, 1]. Employant un resultat connu [4], on peut exprimer les dernières intégrales rationelles au moyen des residus:

$$\int_b^a f(x)\, dx = (a - b) \sum_{C \setminus \text{axe réels pos.}} Res \left\{ \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{a z + b}{1+z} \right) \right\}$$

Ainsi qu'on a définitivement

$$J = \int_\alpha^\beta e^{ix} R(\sin x, \cos x)\, dx = 2\pi e^{i\alpha} \sum_{|z|=1,\, 0 \leqslant \arg z \leqslant \beta - \alpha} Res\, R(\alpha, z) +$$

(11)

$$+ \sum_{C \setminus \text{axe réels pos.}} Res \left\{ \frac{i \ln z}{(1+z)^2} \left[e^{i\beta} \cdot R\left(\beta, \frac{1}{1+z}\right) - e^{i\alpha} R\left(\alpha, \frac{1}{1+z}\right) \right] \right\}$$

Nous avons réussi à representer une intégrale trigonometrique au moyen d'une somme finie des résidus des certaines fonctions analytiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. Д. С. Митриновић — Комплексна анализа, III издање, Београд 1973.

[2]. Behnke — Sommer — Theorie der Analytichen Functionen, zweiter Auflage, 1962.

[3]. Евграфов и др. — Сборник задач по теории аналитических функций, изд. Наука, pp. 159, 195, 241, 246, 252.

[4]. D. Dimitrovski i D. Adamović — Sur quelques formules du calcul des résidus, Matematički vesnik, 1 (16), 113, sv. 2. Beograd 1964.

Драган С. Димитровски

ЗАБЕЛЕШКА ЗА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ИНТЕГРАЛИ

(Р е з и м е)

Постојат повеќе методи [1] за пресметување на специјални интеграли од вид (1). За поопштите интеграли од вид (4), покрај класичната метода со примитивната функција, во [2], [3] се дадени методи на пресметување преку конечни суми на остатоци. Во овој труд даваме нова формула, (10), односно (11) за интегралите (4).