НЕКЕ ПРИМЕНЕ ДИРЕКТНО ОРТОГОНАЛНИХ ВЕКТОРА У ГЕОМЕТРИЈИ РАВНИ

Јован В. Малешевић

(*Саопштено на V конгресу МФА Југославије, Охрид: 14 — 19. 9. 1970 год.*)

Први став у овом раду је у извесном смислу инверзан став ставу датом од стране аутора у раду [1]. Став 2 разматра проблем дегенерисања, док последица тог става садржи став 2 из [2] као специјалан случај. На крају је формулисан и доказан став 3.

Став 1. Нека су на страницама AB, BC, CA троугла ABC полазећи од тачака A, B, C узете тачке M_1, N_1, P_1 респективно тако да је

$$\overrightarrow{AM}_1 = K\overrightarrow{AB} = K\vec{C},\quad \overrightarrow{BN}_1 = K\overrightarrow{BC} = K\vec{a}, \overrightarrow{CP}_1 = K\overrightarrow{CA} = K\vec{B},\quad K \neq 0$$

и у тачкама M_1, N_1, P_1 подигнуте нормале које у пресеку са полуправама m_A, m_B, m_C из тачака A, B, C дају редом тачке M, N, P (Сл. 1)

Ако полуправе m_A, m_B, m_C чине са векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ респективно, угао α, $|\alpha| \in (0, \pi/2)$, то важи:

1) За $\alpha = \pm\pi/6$ троугао MNP је једнакостраничан ако и само ако је $k = \dfrac{1}{2}$.

2) За $\alpha = \pm\pi/4$:

$$BP \perp MN, \quad CM \perp NP, \quad AN \perp PM$$

и

$$\overline{BP} = \overline{MN}, \quad \overline{CM} = \overline{MP}, \quad \overline{AN} = \overline{PM}$$

ако и само ако је $k = \dfrac{1}{2}$.

3) За $\alpha = \pm\pi/3$:

$$\overline{BP} = \overline{CM} = \overline{AN}.$$

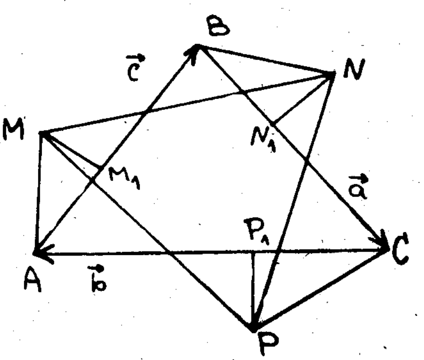
ако и само ако је $k = \dfrac{1}{2}$.

4) За свако $|\alpha| \subset (0, \pi/2)$:

$$BP,\ CM \text{ и } AN$$

се секу у једној тачки, ако и само ако је $k = \dfrac{1}{2}$.

Доказ 1) Важи (Сл. 1)



Сл. 1

$$(1)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{MN} = k\, tg\, \alpha\, (\vec{a}' - \vec{c}') + k\, (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c} \\ \overrightarrow{PM} = k\, tg\, \alpha\, (\vec{c}' - \vec{b}') + k\, (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} \\ \overrightarrow{NP} = k\, tg\, \alpha\, (\vec{b}' - \vec{a}') + k\, (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a} \end{cases}$$

и

$$(2)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{AN} = k\, tg\, \alpha\, \vec{a}' + k\vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{BP} = k\, tg\, \alpha\, \vec{b}' + k\vec{b} + \vec{a} \\ \overrightarrow{CM} = k\, tg\, \alpha\, \vec{c}' + k\vec{c} + \vec{b} \end{cases}$$

Из услова

$$\overline{MN} = \overline{PM}$$

следује релација

$$(3) \qquad 3k^2(a^2-b^2)(tg^2\alpha+1)+2k[2b^2-(a^2+c^2)]+c^2-b^2=0$$

која за $\alpha=\pm\pi/6$ даје једначину по k:

$$(4) \qquad 4k^2(a^2-b^2)+2k[2b^2-(a^2+c^2)]+c^2-b^2=0$$

која има за решења бројеве

$$(5) \qquad k_1=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad k_2=\frac{1}{2}\,\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2} \quad (a\neq b)$$

Цикличним пермутовањем $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a}$ вектор $\overrightarrow{MN}$ прелази у вектор $\overrightarrow{NP}$ а једначина (4) добија облик

$$4k^2(b^2-c^2)+2k[2c^2-(a^2+b^2)]+a^2-c^2=0$$

са решењима

$$(5') \qquad k_1=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad k_2=\frac{1}{2}\,\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2} \quad (b\neq c)$$

одакле следује коначно резултат тачке 1).

2) Према (1) и (2) имамо

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BP}=k^2(c^2-a^2)(tg^2\alpha+1)+k(a^2-c^2)+\vec{a}\cdot\vec{c}\,(1-2k)$$

што за $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ и $\alpha=\pm\pi/4$ доводи до једначине по k:

$$(6) \qquad 2k^2(c^2-a^2)+k(a^2-c^2)+\vec{a}\cdot\vec{c}\,(1-2k)=0$$

која има за решења бројеве:

$$k_1=\frac{1}{2}, \quad k_2=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{c^2-a^2} \quad (a\neq c)$$

Услов

$$\overline{MN}=\overline{BP}$$

доводи до услова

$$(7) \qquad -4\,\vec{a}\cdot\vec{c}\,k^2(tg^2\alpha+1)+4k\,\vec{a}\cdot\vec{c}+(c^2-a^2)(1-2k)=0$$

који се за $\alpha=\pm\pi/4$ трансформише на једначину по k;

(8) $$-8\,\vec{a}\cdot\vec{c}\,k^2+2k\,(2\,\vec{a}\cdot\vec{c}+a^2-c^2)+c^2-a^2=0$$

која има за решења бројеве:

$$k_1=\frac{1}{2},\quad k_2=\frac{1}{4}\,\frac{a^2-c^2}{\vec{a}\cdot\vec{c}}\quad(\vec{a}\cdot\vec{c}\neq 0)$$

Друга два кореспондентна пара, такође доводе, у оба горња случаја до решења $k_1=\frac{1}{2}$ чиме се доказ тачке 2) завршава.

3) Услов

$$\overline{BP}=\overline{CM}$$

доводи до услова

(9) $$k^2\,(b^2-c^2)\,(tg^2\,\alpha+1)-2k\,(a^2-c^2)+a^2-b^2=0$$

који се за $\alpha=\pm\,\pi/3$ своди на једначину по k:

(10) $$4k^2\,(b^2-c^2)-2k\,(a^2-c^2)+a^2-b^2=0$$

са решењима

$$k_1=\frac{1}{2},\quad k_2=\frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}\,(b\neq c)$$

До решења $k_1=\frac{1}{2}$ доводи и услов $\overline{CM}=\overline{AN}$, при услову $\alpha=\pm\,\pi/3$, чиме се доказ тачке 3) завршава.

4) Из

$$\overrightarrow{BS}=-\vec{c}+\lambda\,\overrightarrow{AN}=-\vec{b}+\mu\,\overrightarrow{CM}$$

следује

$$\lambda=\frac{-\vec{b}\cdot\overrightarrow{CM'}}{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM'}}$$

тј.

$$\overrightarrow{BS}=-\vec{c}+\frac{-\vec{b}\cdot\overrightarrow{CM'}}{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM'}}\,\overrightarrow{AN}$$

и одавде

$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BP'} = -\vec{c}\cdot\overrightarrow{BP'} + \frac{-\vec{b}\cdot\overrightarrow{CM'}}{+\vec{N}\cdot\overrightarrow{CM'}}\,\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BP'}$$

Како је према (2)

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{O}, \quad \forall\,|\alpha| \in (0, \pi/2)$$

то је

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BP'} = -\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM'}$$

па је

$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BP'} = -\vec{c}\cdot\overrightarrow{BP'} + \vec{b}\cdot\overrightarrow{CM'} = \cdots = (2k-1)\,\vec{b}\cdot\vec{c'}$$

Сада услов $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BP'} = 0$ доводи до услова

$$(2k-1)\,\vec{b}\cdot\vec{c'} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\,(\vec{b} \neq k\vec{c})$$

одакле следује закључак тачке 4).

Овим је став 1 у целости доказан.

Став 2. Нека су $A_i\,(i = 1, 2, 3)$ темена произвољног троугла, и нека су m_{Ai} полуправе из тачака A_i које граде угао $\alpha, |\alpha| \in (0, \pi/2)$, са векторима

$$\overrightarrow{A_i A_j} = \vec{a}_i,\ (i, j) \in \{(1, 2); (2, 3); (3, 1)\}$$

респективно. Означимо симетрале страница $A_i A_j$ са S_{AiAj} и ставимо

$$S_{AiAj} \cap m_{Ai} = Mi, Mi'$$

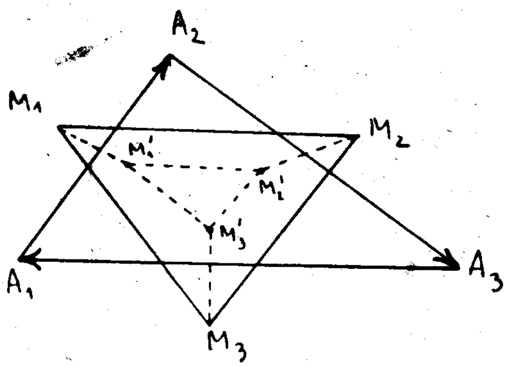
(Сл. 2); важи следеће тврђење:

На класи неједнако страничних троуглова $A_1 A_2 A_3$ троуглови $M_1' M_2' M_3'$ могу дегенерисати само у праву, и то за две вредности угла $\alpha, \alpha \in (-\pi/2, 0)$, наиме за

$$\alpha = arctg\, \frac{-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \pm \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 48\,P^2}}{12\,P} \tag{11}$$

(P-површина троугла $A_1 A_2 A_3$); што за случај класе једнакостраничних троуглава $A_1 A_2 A_3$ даје $\alpha = -\pi/6$, и тада за резултат дегенерације имамо тачку.

Доказ. За $0 < \alpha < \pi/2$ односно троуао $M_1 M_2 M_3$ (Сл. 2) имамо



(Сл. 2)

$$2P_1(\alpha) = \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_2 M_3'} = \left(-\frac{\vec{a}_3}{2} + \frac{\vec{a}_2{}' - \vec{a}_1{}'}{2} tg\alpha\right) \cdot \left(-\frac{\vec{a}_1}{2} + \frac{\vec{a}_3{}' - \vec{a}'_2}{2} tg\alpha\right)'$$

$$= \left(-\frac{\vec{a}_3}{2} + \frac{\vec{a}_2{}' - \vec{a}_1{}'}{2} tg\alpha\right) \cdot \left(-\frac{\vec{a}_1{}'}{2} - \frac{\vec{a}_3 - \vec{a}_2}{2} tg\alpha\right)$$

$$= \cdots = \frac{P}{2}(3\, tg^2 \alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4} tg\alpha$$

тј.

$$P_1(\alpha) = \frac{P}{4}(3\, tg^2 \alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{8} tg\alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2) \tag{12}$$

За $-\pi/2 < \alpha < 0$ и случај да су троуглови $M_1 M_2 M_3$ и $M_1' M_2' M_3'$ исте оријентације (Сл. 2) имамо

$$2P_1(\alpha) = \overrightarrow{M_1' M_2'} \cdot \overrightarrow{M_2' M_3'} = \left(-\frac{\vec{a}_3}{2} + \frac{\vec{a}_1{}' - \vec{a}_2{}'}{2} tg\alpha\right) \cdot \left(-\frac{\vec{a}_1}{2} + \frac{\vec{a}_2{}' - \vec{a}_3{}'}{2} tg\alpha\right)'$$

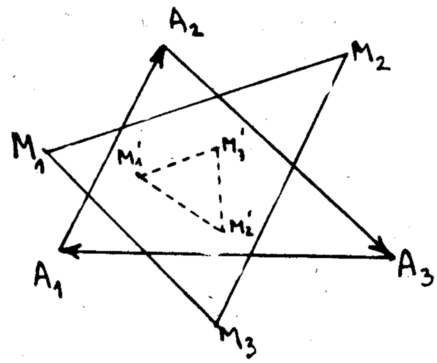
$$= \left(-\frac{\vec{a}_3}{2} + \frac{\vec{a}_1{}' - \vec{a}_2{}'}{2} tg\alpha\right) \cdot \left(-\frac{\vec{a}_1{}'}{2} + \frac{\vec{a}_3 - \vec{a}_2}{2} tg\alpha\right)$$

$$= \cdots = -\left[\frac{P}{2}(3\, tg^2 \alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4} tg\alpha\right]$$

тj.

$$(13) \quad P_1(\alpha) = -\left[\frac{P}{4}(3\,tg^2\alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{8}\,tg\alpha\right], \quad \alpha \in (-\pi/2, 0)$$

За $-\pi/2 < \alpha < 0$ и случај да су троуглови $M_1 M_2 M_3$ и $M_1' M_2' M_3'$ супротне оријентације (Сл. 3) имамо пак



(Сл 3)

$$2\,P_1(\alpha) = \overrightarrow{M_3' M_2'} \cdot \overrightarrow{M_2' M_1'} = -(\overrightarrow{M_1' M_2'} \cdot \overrightarrow{M_2' M_3'})$$

$$= \frac{P}{2}\left(3\,tg^2\,\alpha + 1\right) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4}\,tg\,\alpha$$

тj.

$$(14) \quad P_1(\alpha) = \frac{P}{4}(3\,tg^2\,\alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{8}\,tg\alpha, \; \alpha \in (-\pi/2, 0)$$

За случај да су троуглови $M_1\,M_2\,M_3$ и $M_1'\,M_2'\,M_3'$ супротне оријентације, из израза за површину троугла $M_1'\,M_2'\,M_3'$:

$$(14') \quad P_1(\alpha) = \frac{P}{4}(3\,tg^2\,\alpha + 1) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{8}\,tg\alpha, \; \alpha \in (-\pi/2, 0)$$

следује

$$P_1'(\alpha) = \frac{12\,Ptg\,\alpha + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{8\,cos^2\alpha}$$

и да је за

$$tg\,\alpha_1 = -\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{12\,P}$$

реч о минимуму функције (19′) који износи

$$P_1(\alpha_1)=\frac{P}{4}-\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{192\,P}$$

Са обзиром на ненегативност израза $P_1(\alpha)$ имамо да је

$$\frac{P}{4}-\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{192\,P}\geqslant 0$$

тј.

(15) $$a_1^2+a_2^2+a_3^2\leq 4\,P\sqrt{3}$$

Класа троуглова $A_1\,A_2\,A_3$ која задовољава услов

(16) $$a_1^2+a_2^2+a_3^2<4\,P\sqrt{3}\Leftrightarrow a_1^4+a_2^4+a_3^4<a_1^2\,a_2^2+a_2^2\,a_3^2+a_3^2\,a_1^2$$

је празна што следује из неједнакости

(17) $$a_1^4+a_2^4+a_3^4\geqslant a_1^2a_2^2+a_2^2\,a_3^2+a_3^2\cdot a_1^2$$

Класа троуглова $A_1\,A_2\,A_3$ која задовољава услов

(18) $$a_1^2+a_2^2+a_3^2=4\,P\sqrt{3}\Leftrightarrow a_1^4+a_2^4+a_3^3=a_1^2\,a_2^2+a_2^2\,a_3^2+a_3^2\,a_1^2$$

је непразна, реч је наиме о класи једнакостраничних троуглова ($a_1^4+a_2^4+a_3^4=a_1^2\,a_2^2+a_2^2\,a_3^2+a_3^2\,a_1^2\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3$). За ову класу имамо да је

$$P_1(\alpha_1)=0$$

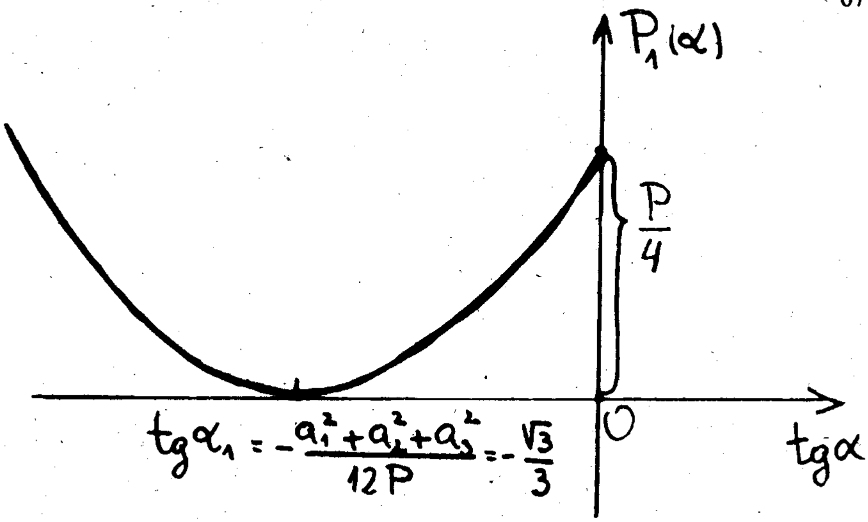
и тада је

$$tg\,\alpha_1=-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{12\,P}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

тј.

$$\alpha_1=-\pi/6$$

— дегенерисање унутрашњег „троугла Наполеона" у тачку при класи једнакостраничних троуглова $A_1\,A_2\,A_3$ (Сл. 4).



(Сл. 4)

$$(13')\qquad P_1(\alpha) = -\frac{P}{4}(3\,tg^2\alpha+1) - \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{8}\,tg\alpha,\quad \alpha \in (-\pi/2, 0)$$

— случај кад је троугао $M_1' M_2' M_3'$ исте оријентације са троуглом $M_1 M_2 M_3$ — имамо да је за

$$tg\alpha_1 = -\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{12\,P}$$

реч о максимуму израза (18′) и да исти износи

$$P_1(\alpha_1) = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{192\,P} - \frac{P}{4}$$

Са обзиром на ненегативност израза (18′) следује да је

$$(19)\qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2 \geqslant 4\,P\sqrt{3}$$

Класа троуглова $A_1 A_2 A_3$ која задовољава услов

$$(20)\qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2 > 4\,P\sqrt{3} \Leftrightarrow a_1^4+a_2^4+a_3^4 > a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2$$

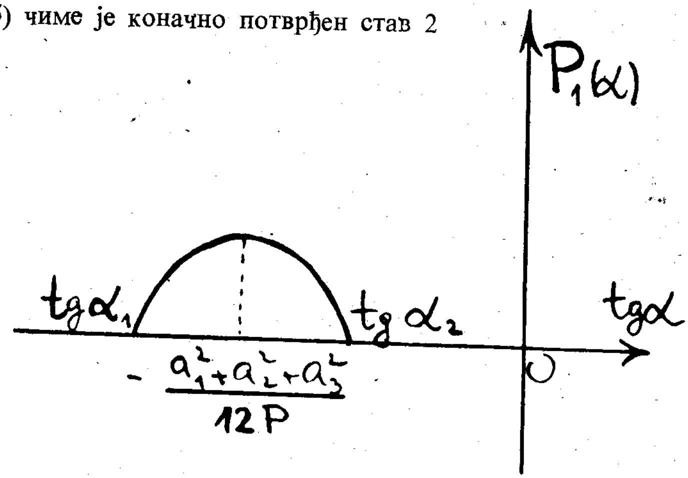
је непразна, тој класи припадају сви неједнакостранични троуглови. За горњу класу троуглова имамо да се израз (13′) анулира за

$$6\,P tg^2\alpha + (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,tg\,\alpha + 2\,P = 0$$

тј.

$$(tg\alpha)_{1,2} = \frac{-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \pm \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 48\,P^2}}{12\,P}$$

(Сл. 5) чиме је коначно потврђен став 2



(Сл. 5)

Последица. Ако је $P_1(\alpha)$ — површина троугла $M_1 M_2 M_3$, $P_1(\alpha)$ — површина троугла $M_1' M_2' M_3'$; то важи

(21) $$P_1(\alpha) - P_1(-\alpha) = \frac{P}{2}(3\,tg^2\alpha + 1), \quad \alpha \in (0, \pi/2)$$

за случај да је троугао $A_1A_2A_3$ из класе неједнакостраничних троуглова; и

(22) $$P_1(\alpha) - P_1(-\alpha) = P\sqrt{3}\,tg\,\alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2)$$

за класу једнакостраничних троуглова.

Заиста за случај класе неједнакостраничних троуглова $A_1 A_2 A_3$ из (12) и (13′) следује (21); док за класу једнакостраничних троуглова $A_1 A_2 A_3$ из (12) и (14′) следује (22).

Примедба. Из (21) следује да је за класу неједнакостраничних троуглова $A_1 A_2 A_3$:

(23) $$P_1(\alpha) - P_1(-\alpha) > \frac{P}{2}, \quad \forall\, \alpha \in (0, \pi/2);$$

даље да је, сходно (21) и (22), израз

(24) $$P_1(\alpha) - P_1(-\alpha), \quad \alpha \in (0, \pi/2)$$

на наведеним двема класама једнак површини третираног троугла ако и само ако је $\alpha=\pi/6$.

У горњој последици садржан је као специјалан случај став 2 из рада [2]: разлика површина спољашњег и унутрашњег „троугла Наполеона" једног троугла једнак је површини тог троугла.

Став 3. Нека су $A_i\,(i=1,2,3,4)$ темена произвољног четвороугла у равни, и нека су m_{Ai} полуправе из тачака A_i које граде угао α, $|\alpha|\in(0,\pi/2)$, са векторима

$$\overrightarrow{A_i A_j}=\vec{a}_i,\ (i,j)\in\{(1,2);(2,3);(3,4);(4,1)\}$$

респективно. Означимо симетрале страница $A_i A_j$ са S_{AiAj} и ставимо

$$S_{AiAj}\cap m_{Ai}=M_i',\ M_i'$$

Важе следећа тврђења:

1) Четвороуглови $M_1 M_2' M_3' M_4'$ и $M_1' M_2\ M_3' M_4$ су паралелограми за $\forall\,|\alpha|\in(0,\pi/2)$.

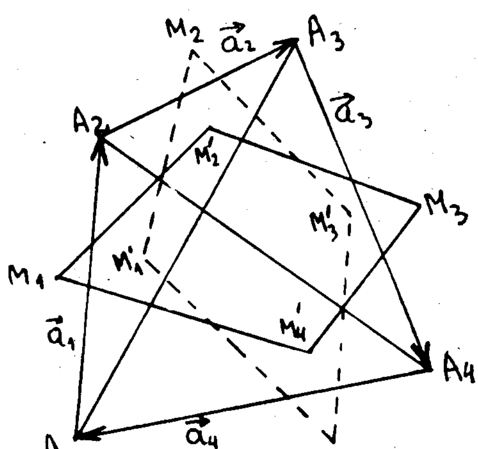
2) Дијагонале паралелограма $M_1 M_2' M_3\ M_4'$ и $M_1' M_2 M_3' M_4$ су две по две међусобно нормалне ако и само ако је $\overline{A_1A_3}=\overline{A_2A_4}$ или $|\alpha|=\pi/4$.

3) Дијагонале паралелограма $M_1 M_2' M_3 M_4'$ и $M_1' M_2 M_3' M_4$ су две по две међусобно једнаке ако и само ако је $A_1A_3\perp A_2A_4$ или $|\alpha|=\pi/4$.

Доказ. 1) Доказ под тачком 1) следује из

$$(25)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{M_1 M_2'}=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_3}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{A_1A_3'}}{2}\,tg\,\alpha=-\overrightarrow{M_3 M_4'} \\[2ex] \overrightarrow{M_2' M_3}=\dfrac{\overrightarrow{A_2'A_4}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{A_2A_4'}}{2}\,tg\,\alpha=-\overrightarrow{M_4'M_1'} \end{cases}$$

(Сл. 6)



(Сл. 6)

Специјално за $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_2A_4}$ паралелограм $M_1\, M_2'\, M_3\, M_4'$ је ромб. Такође четвороугао $M_1'\, M_2\, M_3'\, M_4$ је паралелограм што следује из

$$
(26)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{M_1'\, M_2} = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_3}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{A_1A_3'}}{2}\, tg\,\alpha = -\overrightarrow{M_3'\, M_4} \\[2ex] \overrightarrow{M_2\, M_3'} = \dfrac{\overrightarrow{A_2A_4}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{A_2A_4'}}{2}\, tg\,\alpha = -\overrightarrow{M_4\, M_1'} \end{cases}
$$

2) Из

$$
(27)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{M_1\, M_3}\,,\ \overrightarrow{M_1'\, M_3'} = \dfrac{\vec{m} + \vec{n}}{2} \pm \dfrac{\vec{n}' - \vec{m}'}{2}\, tg\alpha \\[2ex] \overrightarrow{M_2\, M_4}\,,\ \overrightarrow{M_2'\, M_4'} = \dfrac{\vec{n} - \vec{m}}{2} \pm \dfrac{\vec{n}' + \vec{m}'}{2}\, tg\alpha \end{cases}
$$

(знакови „минус" узимају се за друге векторе у паровима) где је стављено $\overrightarrow{A_1\, A_3} = \vec{m}$, $\overrightarrow{A_2\, A_4} = \vec{n}$, следује

$$
\overrightarrow{M_1\, M_3} \cdot \overrightarrow{M_2\, M_4} = \overrightarrow{M_1'\, M_3'} \cdot \overrightarrow{M_2'\, M_4'} = \frac{n^2 - m^2}{2}\,(1 - tg^2\,\alpha)
$$

одакле добијамо закључак тачке 2).

3) Релације

$$
\overrightarrow{M_1\, M_3}^2 = \overrightarrow{M_2\, M_4}^2 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_1'\, M_3'}^2 = \overrightarrow{M_2'\, M_4'}^2
$$

имплицирају релацију

$$
\vec{m} \cdot \vec{n}\,(1 - tg^2\,\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\vec{m} \perp \vec{n}\ \forall\ |\alpha| = \pi/4)
$$

чиме добијамо доказ тачке 3).

Овим је доказ става 3 завршен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Јован В. Малешевић: Директно ортогонални вектори троугла и неке њихове примене; Настава математике и физике, V, XIII — XIV, Београд, 1964 — 1965.

[2] J. Garfunkel and S. Stahl: The triangle reinvestigated; The american mathematical monthly, 1965, № 1.

Jovan V. Malešević

EINIGE ANWENDUNGEN DER DIREKT ORTHOGONALEN VEKTOREN IN DER GEOMETRIE DER EBENE

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel sind folgende Sätze gegeben:

1) Satz 1, der gewissermassen als invers dem entsprechenden Satz des Autors — angegeben in der Literatur [1] — angesehen werden kann.

2) Satz 2, in dem eine Generalisation des entsprechenden Satzes in L [2] gegeben wird.

3) Zum Schluss wird auch Satz 3 konstruiert und bewiesen.

Die Beweise der angeführten Sätze sind mit der Methode der direkt orthogonalen Vektoren angegeben.