РЕДУЦИБИЛНИ АСОЦИЈАТИВИ

Н. ЦЕЛАКОСКИ

Во статијата [1] е воведен поимот редуцибилна полугрупа и докажани се неколку резултати во врска со него. Во оваа работа тој поим се воведува за поопштите алгебарски структури наречени асоцијативи и се обопштуваат некои од резултатите од споменатата статија.

1. Нека е A произволно непразно множество, а $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n+1}$ множеството од сите подредени $(n+1)$-ки $(a_0,\ldots,a_n)$, $a_i\in A$. Секое еднозначно пресликување ω: $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n+1}\to A$ се вика $(n+1)$-арна операција на множеството A. Ако равенството

$$\omega(\omega(a_0,\ldots,a_n),\ a_{n+1},\ldots,\ a_{2n}) =$$
$$= \omega(a_0,\ldots,\ a_{i-1},\ \omega(a_i,\ldots,\ a_{i+n}),\ a_{i+n+1},\ldots,\ a_{2n})$$

е точно за секои $a_0,\ a_1,\ldots,\ a_{2n}\in A$ и за секој $i=1,\ 2,\ldots,\ n$, тогаш парот $A(\omega)$ се вика *асоцијатив*[1]) (или n-асоцијатив, ако е потребно да се истакне „должината" на операцијата ω). Понатаму, наместо $\omega(a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n)$ ќе пишуваме $a_0a_1\ldots a_n$, а асоцијативот $A(\omega)$ ќе го означуваме само со A.

Ако P_i, $i=0,\ 1,\ldots,\ n$, се непразни подмножества од асоцијативот A, тогаш ќе ставиме:

$$P_0P_1\cdots P_n=\{x_0x_1\cdots x_n\mid x_i\in P_i\}.$$

Во таа смисла, за кои било елементи $a,\ a_1,\ldots,\ a_n\in A$ и непразно подмножество P, наместо:

$$\{x_1\cdots x_na\mid x_i\in P\},\ \{xa_1\cdots a_n\mid x\in P\},\ \{x\underbrace{a\cdots a}_{n}\mid x\in P\},$$

---

[1]) Терминот *асоцијатив* е употребен од Глускин во работата [2]. Во литературата почесто се среќава терминот *n-полугрупа*.

4*

ќе пишуваме:

$$P^n a,\ Pa_1 \cdots a_n,\ Pa^n \text{ соодветно.}$$

2. Нека M е произволно непразно множество, $\mathcal{P}(M)$ партитивното множество од M и f (еднозначно) пресликување од M во $\mathcal{P}(M)$. Имајќи го предвид подредувањето по инклузија ($\subseteq$) во $\mathcal{P}(M)$, ќе ставиме:

$$T = \{t \in M \mid f(t) \text{ е максимален член во } \{f(x) \mid x \in M\}\}. \tag{2.1}$$

Ако

$$\bigcup_{t \in T} f(t) = M,$$

тогаш $f: M \to \mathcal{P}(M)$ ќе го викаме *редуцибилно пресликување*. Сметајќи го за пресликување од $\mathcal{P}(M)$ во $\mathcal{P}(M)$ на вообичаен начин, условот (2.2) може да се искаже со равенството

$$f(T) = M. \tag{2.3}$$

Ако пресликувањето $f: M \to \mathcal{P}(M)$ е редуцибилно и ако

$$(\forall x \in M)\ f(f(x)) \subseteq f(x), \tag{2.4}$$

тогаш

$$(\forall t \in T)\ t \in f(t). \tag{2.5}$$

Да забележиме дека условот $f(M) = M$ не е доволен за да биде f редуцибилно пресликување.

ПРИМЕР 1. За пресликувањето $f: \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ (каде што со $\mathbf{N}$ е означено множеството на природните броеви), дефинирано со:

$$f(1) = \mathbf{N} \setminus \{1\},\ f(n) = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ за } n \geqslant 2,$$

имаме $f(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$, но тоа не е редуцибилно. Имено, $T = \{1\}$ (само $f(1) = \{2, 3, \ldots\}$ е максимално) и $f(T) \neq \mathbf{N}$.

Нека пресликувањето $f: M \to \mathcal{P}(M)$ е редуцибилно, со $f(T) = M$, $T = \{t \in M \mid f(t)$ е максимално во $\{f(x) \mid x \in M\}\}$. Дефинирајќи во T релација ρ со:

$$x \rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

и увидувајќи дека ρ е еквивалентност, множеството T го разбиваме на класи еквивалентни елементи. Земајќи по еден (и само по еден) претставник од секоја класа, добиваме множество U за кое важи:

$$U \subseteq T,\ f(U) = M,\ (\forall u_1, u_2 \in U)\ f(u_1) \subseteq f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2. \tag{2.6}$$

Секое множество U што ги исполнува особините (2.6) се вика f-редуцирано множество.

Од дефиницијата е јасно дека за едно редуцибилно пресликување f можат да постојат повеќе f-редуцирани множества, како што покажува и следниов:

ПРИМЕР 2. Пресликувањето $f: \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$, дефинирано со:

$$f(1) = \{1\},\ f(2) = \mathbf{N} \setminus \{1,\ 3\},\ f(k) = \mathbf{N} \setminus \{1,\ k\} \text{ за } k = 3,\ 4,\ 5,$$

$$f(n) = \mathbf{N} \setminus \{1,\ 2, \ldots,\ n\} \text{ за } n \geqslant 6$$

е редуцибилно, при што $f(k)$ за $k = 1, \ldots,\ 5$ се максимални. Множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ не е f-редуцирано, зашто (2.6) не е исполнет при $u_1 = 2$ и $u_2 = 3$, а множествата $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2,\ 4\}$ се f-редуцирани.

Ќе наведеме уште еден пример.

ПРИМЕР 3. Пресликувањето $f: \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$, дефинирано со:

$$f(1) = f(2) = \{1,\ 2\},\ f(3) = \{3,\ 4,\ 5\},\ f(4) = \{4,\ 5),$$

$$f(5) = \{5\},\ f(n) = \mathbf{N} \setminus \{1, \ldots,\ n-1\} \text{ за } n \geqslant 6$$

е редуцибилно, при што множествата $U = \{1,\ 3,\ 6\}$ и $V = \{2,\ 3,\ 6\}$ се (единствените) f-редуцирани множества.

(Да забележиме дека за ова пресликување важи условот (2.4), а за пресликувањето од примерот 2 тој услов не важи.)

3. Нека е A n-асоцијатив и нека f_1, f_2, f_3 се пресликувања од A во $\mathcal{P}(A)$ определени со:

$$(\forall\, a \in A)\ \ f_1(a) = A^n\, a, \tag{3.1}$$

$$f_2(a) = A\, a^n, \tag{3.2}$$

$$f_3(a) = \{x \mid x \in A,\ xa^n = x\}. \tag{3.3}$$

Да забележиме дека, за секој $a \in A$, точни се инклузиите

$$f_3(a) \subseteq f_2(a) \subseteq f_1(a). \tag{3.4}$$

Користејќи ги овие релации ќе ја докажеме следнава теорема:

ТЕОРЕМА 1. *За секој елемент a од асоцијативот A важи:*

$$f_i(f_j(a)) \subseteq f_j(a),\ i, j = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.5}$$

Доказ. Имаме:

$$f_1(f_1(a)) = f_1(A^n a) = A^n (A^n a) \subseteq A^n a = f_1(a),$$

од што според (3.4) следува и

$$f_1(f_1(a)) \subseteq f_1(u), \qquad i = 2,\ 3.$$

Потоа:

$$f_1(f_2(a)) = f_1(A\, a^n) = A^n (A\, a^n) \subseteq A\, a^n = f_2(a),$$

а од тоа, според (3.4),

$$f_i(f_2(a)) \subseteq f_2(a), \qquad i = 2,\ 3.$$

На крајот:

$$f_1(f_3(a)) = \{x \mid x \in A^n y,\ y\, a^n = y\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \mid x \in A,\ x\, a^n = x\} = f_3(a),$$

од што, поради (3.4), следува и

$$f_i(f_3(a)) \subseteq f_3(a), \qquad i = 2,\ 3.$$

Со тоа теоремата е докажана.

ТЕОРЕМА 2. *Нека е A n-асоцијатив и нека f_1, f_2, f_3 се пресликувањата дефинирани со* (3.1) -- (3.3).

(i) *Ако f_1, $i < 1$, е редуцибилно, тогаш и f_k за $k < i$ е редуцибилно.*

(ii) *Ако f_i, $i > 3$, е редуцибилно и ако $f_{i+1}(A) = A$, тогаш и f_{i+1} е редуцибилно.*

Доказ. (i) Нека пресликувањето f_i е редуцибилно (притоа i е фиксен елемент од $\{2, 3\}$). Да го разгледаме пресликувањето f_k, каде што $k < i$ (т.е. $k = 1$ при $i = 2$, а k е 1 или 2 при $i = 3$).

Ако $T = \{t \mid t \in A,\ f_i(t)$ максимално$\}$, тогаш $f_i(T) = A$. Ќе покажеме прво дека

$$(\forall\, t \in T)\ f_i(t) = f_k(t). \tag{3.6}$$

Навистина, поради редуцибилноста на f_i и (3.5), имаме $(\forall t \in T)\ t \in f_i(t)$, па

$$f_k(t) \subseteq f_k(f_i(t)) \subseteq f_i(t),$$

кое, заедно со $f_i(t) \subseteq f_k(t)$, според (3.4), го дава равенството (3.6), Од (3.6) следува дека $f_k(T)=A$. За да заклучиме дека f_k е редуцибилно, треба да покажеме уште дека, за секој $t\in T$, $f_k(t)$ е максимално во $\{f_k(a)\mid a\in A\}$. Затоа, нека $f_k(t)\subseteq f_k(a)$ за некој $a\in A$. Од $f_k(T)=A$ следува дека постои $t'\in T$, таков што $a\in f_k(t')$, па имаме

$$f_i(t)=f_k(t)\subseteq f_k(a)\subseteq f_k(f_k(t'))\subseteq f_k(t')=f_i(t').$$

Поради максималноста на $f_i(t)$ имаме $f_i(t)=f_i(t')$, па следствено $f_k(t)=f_k(a)$, т.е. $f_k(t)$ е максимален елемент во $\{f_k(a)\mid a\in A\}$.

(ii) Нека $T=\{t\mid t\in A,\ f_i(t)$ е максимално во $\{f(a)\mid a\in A\}\}$. Од $f_{i+1}(A)=A=f_i(\mathrm{T})$ следува $(\forall\, t\in T)\ (\exists\, s\in A)\ t\in f_{i+1}(s)$, па значи постои барем едно подмножество S од A со особината:

$$(\forall\, t\in T)\ (\exists!\, s\in S)\ t\in f_{i+1}(s). \tag{3.7}$$

Јасно,

$$A=f_i(T)=\bigcup_{t\in T} f_i(t)\subseteq\bigcup_{s\in S} f_i(f_{i+1}(s))\subseteq\bigcup_{s\in S} f_{i+1}(s),$$

т.е. $f_{i+1}(S)=A$. За да заклучиме f_{i+1} е редуцибилно, треба да покажеме уште дека множеството $f_{i+1}(s)$, за секој $s\in S$, е максимално во $\{f_{i+1}(a)\mid a\in A\}$. Прво, ако t е произволен елемент од T, според (3.7), (3.5) и (3.4), имаме:

$$f_i(t)\subseteq f_i(f_{i+1}s))\subseteq f_{i+1}(s)\subseteq f_i(s).$$

Од редуцибилноста на f_i, т.е. од максималноста на $f_i(t)$, следува $f_i(t)=f_i(s)$ од што добиваме

$$f_i(t)=f_{i+1}(s). \tag{3.8}$$

Нека $f_{i+1}(s)\subseteq f_{i+1}(a)$ за некој $a\in A$. Од $f_i(T)=A$ следува дека постои $t\in T$ таков што $a\in f_i(t)$, па

$$f_{i+1}(s)\subseteq f_{i+1}(a)\subseteq f_{i+1}(f_i(t))\subseteq f_i(t),$$

од што (увидувајќи дека за односниот елемент $t\in T$, елементот $s\in S$ е оној од (3.7)), поради (3.8), следува $f_{i+1}(s)=f_{i+1}(a)$, т.е. $f_{i+1}(s)$ е максимален.

Од сето тоа следува дека f_{i+1} е редуцибилно.

Со тоа доказот е комплетиран.

За еден асоцијатив велиме дека е *редуцибилен* [*слабо редуцибилен*, *неутрално редуцибилен*] ако е редуцибилно пресликувањето f_1 [f_2, f_3 соодветно].

Од овие дефиниции и од теоремата 2 директно се добива точноста на следнава теорема:

ТЕОРЕМА 3. *Ако еден асоцијатив A е неутрално редуцибилен, тогаш A е и слабо редуцибилен, а од тоа следува дека тој е и редуцибилен.*

Обратно, ако A е редуцибилен и $f_2(A)=A$, тогаш A е слабо редуцибилен, а ако е уште и $f_3(A)=A$, тогаш A е и неутрално редуцибилен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ Чупона: За редуцибилните полугрупи, Годишен зборник на Филозофскиот факултет, Скопје 1958, 19—27.

[2] Л. М. Глускин: О позиционных оперативах, ДАН СССР 157, 4 (1964) 767—770.

[3] А. Клиффорд, Г. Престон: Алгебраическая теория полугрупп, Москва 1973.

N. Celakoski

REDUCIBLE ASSOCIATIVES

(Summary)

Let A be a non-empty set, $\mathcal{B}(A)$ the Boolean (i.e. the power set) of A and f a mapping from A to $\mathcal{B}(A)$. Considering $\mathcal{B}(A)$ as an ordered set by inclusion ($\subseteq$), let $T=\{t\in A \mid f(t)$ is a maximal member of $\{f(a) \mid a\in A\}\}$. A mapping $f: A\to\mathcal{B}(A)$ is said to be reducible if

$$\bigcup_{t\in T} f(t)=A.$$

Regarding f as a mapping from $\mathcal{B}(A)$ to $\mathcal{B}(A)$ in the obvious way, the last equality can be replaced by $f(T)=A$.

Let A be an n-associative [1]). We can define the following mappings f_1, f_2, f_3 from A to $\mathcal{B}(A)$:

$$(\forall a\in A)\ f_1(a)=A^n a,$$

$$f_2(a)=A a^n,$$

$$f_3(a)=\{x \mid x\in A,\ xa^n=x\},$$

[1]) By an n-associative we mean a non-empty set A on which an $(n+1)$-ary operation ω: $(x_0, x_1, \ldots, x_n)\to x_0x_1\ldots x_n$ is defined such that the equality $(a_0a_1\ldots a_n)a_{n+1}\ldots a_{2n}=a_0\ldots a_{i-1}(a_i\ldots a_{i+n})a_{i+n+1}\ldots a_{2n}$ holds tor all $a_0,\ldots,a_n\in A$ and all $i=1.\ 2,\ldots,n$.

where $A^n a = \{x_1 \cdots x_n a \mid x_1, \ldots, x_n \in A\}$ and $A a^n = \{x \underbrace{a \cdot \cdot \cdot a}_{n} \mid x \in A\}$.

Obviously: $f_3(a) \subseteq f_2(a) \subseteq f_1(a)$ for any $a \in A$. Also:

A. For any $a \in A$

$$f_i(f_j(a)) \subseteq f_j(a), \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

B. Let A be an n-associative and let f_1, f_2, f_3 be the above defined mappings. Then:

(i) If f_i, $i > 1$, is reducible, then f_k, $k < i$, is reducible.

(ii) If f_i, $i < 3$, is reducible and $f_{i+1}(A) = A$, then f_{i+1} is reducible.

We say that an n-associative A is reducible [weakly reducible, neutrally reducible] if the mapping f_1[f_2, f_3 respectively] is reducible. We get from these definitions and **B** the following result:

C. If an n-associative A is neutrally reducible, then A is weakly reducible, and from this it follows that A is reducible.

Conversely, if A is reducible and $f_2(A) = A$, then A is weakly reducible and if in addition $f_3(A) = A$, then A is neutrally reducible.