УСЛОВИ ПРИ КОИ КОРЕНИТЕ НА АЛГЕБАРСКА РАВЕНКА ОД III СТЕПЕН СЕ ПАРТИКУЛАРНИ ИНТЕГРАЛИ НА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД II РЕД

Илија А. Шапкарев

Во [1] имаме добиено врска меѓу коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ на линеарната диференцијална равенка

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0, \tag{1}$$

и коефициентите $a_1(x)$ и $a_2(x)$ на алгебарската равенка

$$y^3 + a_1(x)\,y + a_2(x) = 0, \tag{2}$$

за корените на равенката (2) да бидат партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1).

Во овој труд покажуваме дека корените на алгебарската равенка

$$y^3 + a_1(x)\,y^2 + a_2(x)\,y + a_3(x) = 0, \tag{3}$$

ќе бидат партикуларни интеграли на равенката (1) ако

$$f(x) = -\frac{\begin{vmatrix} A_3 & A_2 \\ B_3 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

$$g(x) = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \tag{5}$$

и ако коефициентите $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ се поврзани со релацијата

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = O, \tag{6}$$

каде што

$$A_1 = 4a_1' a_2^2 + a_1^2 a^1{}_3 — 3a_2 a_3' + 4a_1 a_2 a'_2 — 9a_2' a_3 + 6a_1 a_1' a_3 —$$
$$— 5a_1^2 a_1' a_2 — a_1^3 a_2' + a_1^4 a_1',$$

$$A_2 = 12a_1 a_2^2 + 9a^2{}_1 a_3 — 27a_2 a_3 + 7a_1^3 a_2 + a_1^5,$$

$$A_3 = 6a_2' a_3' + 4a_1 a_1' a_3' — 2a_1 a_2'^2 + 4a_1'' a^2{}_2 — 32a_1 a_2 a_2'' - 3a_2 a_3'' +$$
$$+ a_1^2 a_3'' + 6a_1'^2 a_3 — 9a_2'' a_3 + 6a_1 a_1'' a_3 — 50a_1^2 a_1'' a_2 — 6a_1 a_1'^2 a_2 +$$
$$+ 2a_1^2 a_1' a_2' + 4a_1'^2 a_1 a_2 — a_1^3 a_2'' + a_1^4 a_1'',$$

$$B_1 = 4a_2^2 a_2' + a_1 a_2 a_3' — a_1^2 a_1' a_3 + 12a_1' a_2 a_3 — 9a_3 a_3' — 3a_1 a_2' a_3 —$$
$$— 4a_1 a_1' a_2^2 — a_1^2 a_2 a_2' + a_1^3 a_1' a_2,$$

$$B_2 = 8a_2^3 — a_1^3 a_3 + 9a_1 a_2 a_3 — 27a_3^2 — 6a_1^2 a_2^2 + a_1^4 a_2,$$

$$B_3 = 6a_3'^2 — 4a_1' a_2 a_3' — 2a_2 a_2'^2 + 4a_2^2 a_2'' + a_1 a_2 a_3'' — 9a_3 a_3'' —$$
$$— 3a_1 a_2'' a_3 — a_1^2 a_1'' a_3 + 12a_1'' a_2 a_3 + 6a_1' a_2' a_3 + 2a_1 a_1' a_2 a_2' —$$
$$— 2a_1'^2 a_2^2 — 4a_1 a_1'' a_1^2 + 3a_1^2 a_2 a_2'' + a_1^3 a_1'' a_2,$$

$$C_1 = 4a_1 a_1' a_2 a_3 + a_1^2 a_2' a_3 + 3a_1 a_3 a_3' + 9a_1' a_3^2 — 3a_2 a'_2 a_3 —$$
$$— a_2^2 a_3' — a_1^3 a_1' a_2,$$

$$C_2 = 6a_1^2 a_2 a_3 — 9a_2^2 a_3 — a_1^4 a_3,$$

$$C_3 = 2a_2 a_2' a_3' — a_2^2 a_3'' — 2a_1 a_3'^2 — 2a_1 a_1' a_2' a_3 — 4a'_1{}^2 a_2 a_3 +$$
$$+ 4a_1 a_1'' a_2 a_3 — 3a_2 a_2'' a_3 + a_1^2 a_2'' a_3 + 3a_1 a_3 a_3'' — 9a_1'' a_3^2 — a_1^3 a_1'' a_3$$

За да го докажеме тоа поаѓаме од алгебарската равенка

$$F(x,y) \equiv y^n + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) = 0. \tag{8}$$

Ако оваа равенка два пати ја диференцираме во однос на x, добиваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=O,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

Под претпоставка дека $\frac{\partial F}{\partial y}\neq O$, со елиминацијата на y' и y'' од овие две равенки и од равенката (1), ја добиваме равенката

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+ \tag{9}$$
$$+f\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial F}{\partial x}-g\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3 y=0.$$

Ако во равенката (8) ставиме $n=3$, ја добиваме равенката (3). Бидејќи за равенката (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=a_1'y^2+a_2'y+a_3',$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2+2a_1y+a_2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=a_1''y^2+a_2''y+a_3'',$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2a_1'y+a_2',$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=6y+2a_1,$$

равенката (9) станува

$$27gy^7+(54a_1g-9a_1'f-9a_1'')\,y^6 \tag{10}$$
$$+(36a_1^2g+27a_2g-9a_2'f-12a_1a_1'f+6a_1'^2-9a_2''-$$

$$- 12a_1 a_1'')y^5 + (8a_1^3 g + 36a_1 a_2 g - 4a_1^2 a_1' f - 6a_1' a_2 f -$$

$$- 9a_3' f - 12a_1 a_2' f - 9a_3'' - 12a_1 a_2'' - 4a_1^2 a_1'' - 6a_1'' a_2 +$$

$$+ 6a_1' a_2' + 6a_1 a_1'^2)y^4 + (9a_2^2 g + 12a_1^2 a_2 g - 4a_1 a_1' a_2 f -$$

$$- 6a_2 a_2' f - 4a_1^2 a_2' f - 12a_1 a_3' f + 9a_1 a_1' a_2' + 4a_1'^2 a_2 -$$

$$- 4a_1 a_1'' a_2 - 6a_2 a_2'' - 4a_1^2 a_2'' - 12a_1 a_3'')y^3 + (6a_1 a_2^2 g -$$

$$- a_1' a_2^2 f - 4a_1^2 a_3' f - 6a_2 a_3' f - 4a_1 a_2 a_2' f - 6a_2' a_3' +$$

$$+ 4a_1 a_1' a_3' + 2a_1 a_2'^2 + 6a_1' a_2 a_2' - a_1'' a_2^2 - 4a_1 a_2 a_2'' -$$

$$- 6a_2 a_3'' - 45a_1^2 a_3'') y^2 + (a_2^3 g - a_2^2 a_2' f - 4a_1 a_2 a_3' f -$$

$$- 6a_3'^2 + 4a_1' a_2 a_3' + 2a_2 a_2'^2 - a_2^2 a_2'' - 4a_1 a_2 a_3'') y +$$

$$+ 2a_2 a_2' a_3'' - a_2^2 a_3'' - 2a_1 a_3'^2 - a_2^2 a_2' f = 0.$$

За да бидат сите корени на алгебарската равенка (3 партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1), треба левата страна на равенката (10) да биде делива со левата страна на равенката (3). Полиномот во однос на y, определен со левата страна на равенката (10), ќе биде делив со полиномот во однос на y, определен со левата страна од равенката (3), ако равенството

$$(A_1 f + A_2 g + A_3)y^2 + (B_1 f + B_2 g + B_3)y + C_1 f + C_2 g + C_3 = 0,$$

каде што A_1, A_2, A_3. B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 се определени со (7), претставува идентитет во однос на y.

Во врска со тоа, за определувањето на коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ во функција од коефициентите $a_1(x), a_2(x)$ и $a_3(x)$ од последново равенство го добиваме системот равенки

$$A_1 f + A_2 g + A_3 = 0,$$

$$B_1 f + B_2 g + B_3 = 0,$$

$$C_1 f + C_2 g + C_3 = 0.$$

Од првите две равенки од овој систем за $f(x)$ и $g(x)$ добиваме (4) и (5) и во врска со нив, третата равенка од овој систем ќе биде задоволена ако е исполнета релацијата (6).

Да напомeнеме дека за $a_1 = 0$ ги добиваме резултатите добиени во [1] во врска со равенката (3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шапкарев И. А., Алгебарско интегрирање на линеарни диференцијални равенки од II ред, V Конгрес на математичарите, физичарите и астрономите на Југославија, Зборник на трудовите, том 1, Математика (1973) Скопје.

Ilija A. Šapkarev

DIE DREI WURZELN DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG DRITTEN GRADES ALS PARTIKULÄRE INTEGRALE DER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird gezeigt dass die drei Wurzeln der Algebraischen Gleichung (3) partikuläre Integrale der Gleichung (1) sein werden, wenn die koeffizienten $f(x)$ und $g(x)$ der Differentialgleichung (1) mit (4) und (5) gegeben sind und wenn die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 der algebraischen Gleichung (3) die Relation (6) ausfüllen, wo $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ mit (7) deffiniert werden.