ЗА ЕДНО НЕРАВЕНСТВО

В. Т. Јанекоски

Во книгата [1] е докажан [1]) следниов став од геометријата на триаголникот:

Важи импликацијата

$$A < B \Rightarrow w_a > w_b$$

При тоа, A и B се внатрешни агли на даден триаголник ABC, w_a и w_b се должини на симетралите на аглите A и B.

Горниот став може да се воопшти со следниов

Став. За триаголникот ABC важат еквиваленциите

$$(1_1) \qquad A < B \Leftrightarrow w_a > w_b.$$

$$(1_2) \qquad A = B \Leftrightarrow w_a = w_b.$$

Забележуваме дека втората еквиваленција (1_2), поточно импликацијата $w_a = w_b \Rightarrow A = B$, ја изразува таканаречената теорема на *Steiner* [2].

Доказ. Даваме директен доказ. Да воведеме вектори

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}.$$

Тогаш е

$$(2) \qquad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0.$$

Добро е познато [2]) дека векторите на симетралите на аглите A и B се дадени со равенствата

$$(3) \qquad \vec{w}_a = \frac{b\,\vec{c} - c\,\vec{b}}{b + c}, \quad \vec{w}_b = \frac{c\,\vec{a} - a\,\vec{c}}{c + a},$$

---

[1]) Доказот е на *O. Bottema.*

[2]) Да се види на пр. [2].

каде што со a, b, c се означени големини ра векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Сега, поради (3), е

$$(4_1) \qquad w_a^2 = \frac{1}{(b+c)^2}\,(b^2c^2 - 2bc\,\vec{b}\cdot\vec{c} + c^2b^2)$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}\,(2bc - 2\,\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Слично е

$$(4_2) \qquad w_b^2 = \frac{c\,a}{(c+a)^2}\,(2c\,a - 2\,\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

Бидејќи поради (2), важи

$$2\,\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{b}+\vec{c})^2 - b^2 - c^2 = a^2 - b^2 - c^2,$$

и слично

$$2\,\vec{c}\cdot\vec{a} = b^2 - c^2 - a^2,$$

од равенствата (4) добиваме

$$\frac{(b+c)^2\,(c+a)^2}{c\,(a+b+c)}\,(w_a^2 - w_b^2) = b(c+a)^2\,(b+c-a) - a(b+c)^2\,(c+a-b),$$

од каде што, по лесно уредување

$$(5) \qquad \frac{(b+c)^2\,(c+a)^2}{c(a+b+c)}\,(w_a^2 - w_b^2) =$$

$$= (b-a)\,[ab(a+b+2c) + c(b+c)\,(c+a)].$$

Нека, сега, за дадениот триаголник ABC важи $A < B$. Тогаш од (5), следува $w_a > w_b$. Обратно, нека егзистира триаголник ABC за чиишто симетрали на аглите A и B важат равенствата (4). Тогаш за $w_a > w_b$, од (5) следува $A < B$. Со тоа е докажана еквиваленцнјата за стриктните неравенства (1_1). Доказот на еквиваленцијата (1_2) одеднаш следува од (5), и на него не се задржуваме. Со тоа доказот би бил комплетиран.

BIBLIOGPAFIJA

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities* Groningen, 1969, p. 75. **8. 7.**

[2] V. T. Janekoski, Jedan direktan dokaz *Steiner*-ove teoreme o ravnokrakom trouglu, Matematička biblioteka, »Izabrana poglavlja iz matematike«, sv. *22*, t. II Beograd 1962, p. 181.

SUR UNE INÉGALITÉ

V. T. Janekoski

(Résumé)

Étant w_a, w_b les bissectrices d'un triangle ABC, dans l'ouvrage [1] l'implication.

$$A < B \Rightarrow w_a > w_b$$

est démontrée

Ici, pur un procédé direct, on démontre les équivalences

$$A < B \Leftrightarrow w_a > w_b,$$

$$A = B \Leftrightarrow w_a = w_b.$$