ЗА НЕКОИ n-ПОЛУГРУПИ ШТО СЕ УНИИ ОД n-ГРУПИ

Б. Л. Трпеновски

Поголемиот дел од оваа работа се однесува до една класа n-полугрупи што претставува обопштение на класата полугрупи разгледана најпрво во работата [1]. Прво, во точката 1, се обопштува еден од резултатите од работата [2] од бинарен на $(n+1)$ — арен случај, кој покасно се користи при изучувањето на структурата на споменатата класа n-полугрупи.

1. Ќе ги разгледаме n-полугрупите S што се унии од свои десни идеали, секој од кои е и n-подгрупа од S; притоа, за подмножеството Q од S велиме дека е десен идеал од n-полугрупата $S(*)$ ако $*\, Q \dots Q S \subseteq Q$. Разгледувањето ќе го започниме со следниот.

Пример. Нека $G(*)$ е n-група, а A — некое непразно множество. Нека во директниот производ $G \times A$ дефинираме една $(n+1)$ — арна операција „$*$" со следното равенство:

$$*\,(x_0, a_0)\,(x_1, a_1) \dots (x_n, a_n) = (*\, x_0\, x_1 \dots x_n, a_0), \tag{1. 1}$$

$$x_0, x_1, \dots, x_n \in G, \ a_0, a_1, \dots, a_n \in A.$$

Лесно може да се види дека $G \times A$ е n-полугрупа во однос на така дефинираната операција, и дека за секој $a \in A$, $G_a = \{(x, a)\,;\, x \in G\}$ е n-подгрупа од $G \times A$. Ако $a \neq b$, тогаш $G_a \cap G_b = \emptyset$, Поради тоа што $*\, G_a \dots G_a (G \times A) \subseteq G_a$, имаме дека G_a е десен идеал од $G \times A$. Така, n-полугрупата $G \times A$ е унија од фамилијата $F = \{G_a; a \in A\}$ од десни, взаимно дисјунктни свои идеали, секој од кои е и n-подгрупа од $G \times A$.

Обратно, ќе докажеме дека е точна следната

Теорема 1. *Нека n-полугрупата $S(*)$ е унија од некоја фамилија $F = \{G_a; a \in A\}$ свои десни идеали, секој од кои е и n-подгрупа од S. Тогаш постои n-група $G(*)$ таква да S е изоморфна со n-полугрупата $G \times A$, во која операцијата „$*$" е дефинирана со (1. 1).*

Доказ. Нека $(e_1, \dots, e_n)$ е o-неутрален слог во G_b и нека за секој $x_a \in G_a$ ставиме:

$$x_a\, \varphi_{ab} = *\, e_1 \dots e_n\, x_a. \tag{1. 2}$$

Бидејќи $x_a\, \varphi_{ab} \in G_b$, добиваме дека φ_{ab} е пресликување од G_a во G_b.

Нека $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ е o-неутрален слог во G_a. Тогаш за секои $x_a \in G_a$ и $x_j \in G_j$, $j=1, \ldots, n$ ќе добиеме дека

$$
\begin{aligned}
* x_a x_1 x_2 \ldots x_n &= *(* x_a \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n) x_1 x_2 \ldots x_n = \\
&= * x_a (* \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n x_1) x_2 \ldots x_n = \\
&= * x_a (x_1 \varphi_{1a}) x_2 \ldots x_n = \\
&= * x_a (*(x_1 \varphi_{1a}) \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n) x_2 \ldots x_n = \\
&= * x_a (x_1 \varphi_{1a}) (* \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n x_2) \ldots x_n = \\
&= * x_a (x_1 \varphi_{1a}) (x_2 \varphi_{2a}) \ldots x_n = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= * x_a (x_1 \varphi_{1a}) (x_2 \varphi_{2a}) \ldots (x_n \varphi_{na}), \text{ т. е.}
\end{aligned}
$$

$$
* x_a x_1 \ldots x_n = * x_a (x_1 \varphi_{1a}) \ldots (x_n \varphi_{na}). \tag{1. 3}
$$

Со помош на (1. 3) може лесно да се покаже дека φ_{ab} е хомоморрфизам од G_a во G_b. Со помош на (1. 3) може уште да се покаже дека и, за секои $x_a \in G_a$ и $x_b \in G_b$ е

$$
*(x_a \varphi_{ac}) \ldots (x_a \varphi_{ac}) (x_b \varphi_{bc}) = *(x_a \varphi_{ac}) \ldots (x_a \varphi_{ac}) ((x_b \varphi_{ba}) \varphi_{ac}),
$$

од каде, поради тоа што G_c е n-група, ќе се добие дека, за секој $x_b \in G_b$, $x_b \varphi_{bc} = x_b \varphi_{ba} \varphi_{ac}$. Слично се добива и дека за секој $x_a \in G_a$ е $x_a \varphi_{ac} = x_a \varphi_{ab} \varphi_{bc}$. Од последните две равенства, за $c=b$ и $c=a$, се добива дека $x_b \varphi_{ba} \varphi_{ab} = x_b$ и $x_a \varphi_{ab} \varphi_{ba} = x_a$, што значи дека φ_{ab} е обратно-еднозначно пресликување од G_a на G_b, каде $(\varphi_{ab})^{-1} = \varphi_{ba}$. Со тоа е покажано дека секои две n-подгрупи G_a и G_b, $G_a, G_b \in F$, се меѓусебе изоморфни. Накрај, нека зафиксираме еден елеменг $a \in A$ и нека во $G_a \times A$ дефинираме операција „*" со равенството (1. 1). Ако ставиме $(x_a, b) \rho = x_a \varphi_{ab}$, ќе добиеме дека ρ е изоморфизам од $G_a \times A$ на S. Теоремата е докажана.

Нека забележиме дека (од причини на симетрија) важи сличен резултат за n-полугрупите што се унии од свои леви идеали кои во исто време се и нивни n-подгрупи.

2. Во овој дел ќе ја изучиме структурата на класата n-полугрупи што е обопштение на класата полугрупи разгледана во [1]. Притоа ќе го користиме следниот резултат од [4]:

Теорема (Robinson). *Ако n-полугрупата $S(*)$ има o-неутрален (n-неутрален) елемент e и ако за секој $x \in S$ постои таков $x' \in S$ да $* xe \ldots ex' = e$ $(* x'e \ldots ex = e)$, тогаш $S(*)$ ќе биде n-група.*

Нека изнесиме сега неколку помошни резултати.

Лема 1. *Нека e е i-неутрален елемент во n-полугрупата $S(*)$ Ако $i \neq 0$ $(i \neq n)$, тогаш e ќе биде и n-неутрален (o-неутрален) елемент.*

Доказ. Ако $i \neq 0$, за секој $x \in S$ имаме:

$$* e \ldots ex = * \underbrace{e \ldots e}_{i} (* e \ldots ex) e \ldots e =$$

$$= * (* e \ldots e) \underbrace{e \ldots e}_{i-1} xe \ldots e = * \underbrace{e \ldots e}_{i} xe \ldots e = x.$$

Слично за $i \neq n$.

Со оглед на докажаната лема натака можеме да се задржиме на n-полугрупите со o-неутрални, односно n-неутрални елементи. Притоа, поради симетрија доволно ќе биде да ги разгледаме само n-полугрупите со o-неутрални елементи.

Лема 2. *Нека $S(*)$ е n-полугрупа и нека*

(2. 1) $$* \underbrace{e \cdots e}_{j} a' \underbrace{e \cdots e}_{k} ae \cdots e = e, \quad j + k < n,$$

каде e е o-неутрален елемент во S. Тогаш постои таков елемент $a'' \in S$ да

(2. 2) $$* a'' e \cdots ea = e.$$

Доказ. Поради

$$* e \cdots ea' \underbrace{e \cdots e}_{j} a = * e \cdots ea' \underbrace{e \cdots e}_{k} (* ae \cdots e) =$$

$$= * e \cdots e (* \underbrace{e \cdots e}_{j} a' \underbrace{e \cdots e}_{k} ae \cdots e) e \cdots e = e,$$

ако ставиме $a'' = * e \cdots ea' \underbrace{e \cdots e}_{k+1}$, ќе добиеме дека е точно (2. 2).

Лема 3. *Нека $S(*)$ е n-полугрупа и нека $a \in S$. Ако постојат $a', e \in S$, каде e е o-неутрален елемент, такви да*

(2. 3) $$* \underbrace{e \cdots e}_{j} a \underbrace{e \cdots e}_{k} a' e \cdots e = e,$$

тогаш постојат и $a'', e'' \in S$, каде e'' е o-неутрален елемент, такви да

(2. 4) $$* ae'' \cdots e'' a'' = e''.$$

Доказ. Нека $* a \underbrace{e \cdots e}_{k} a' e \cdots e = e''$. Тогаш,

$$e = * e \cdots e = * (* \underbrace{e \cdots e}_{j} a \underbrace{e \cdots e}_{k} a' e \cdots e) e \cdots e =$$

$$= * \underbrace{e \cdots e}_{j} (* a \underbrace{e \cdots e}_{k} a' e \cdots e) e \cdots e = * \underbrace{e \cdots e}_{j} e'' e \cdots e,$$

поради што се добива и

$$e = *e \cdots e = *\underbrace{e \cdots e}_{n-j}(*\underbrace{e \cdots e}_{j}e'' e \cdots e)\, e \cdots e =$$

$$= *e \cdots e\,(*e'' e \cdots e) = *e \cdots ee''.$$

Со помош на равенството $*e \cdots ee'' = e$ лесно се покажува дека e'' е o-неутрален елемент, а поради,

$$e'' = *\underbrace{ae \cdots ea'}_{k} e \cdots e =$$

$$= *a\,(*e \cdots ee'') \cdots (*e \cdots ee'')\, a'\,(*e \cdots ee'') \cdots (*e \cdots ee'') =$$

$$= *(*ae \cdots e) \cdots (*e'' e \cdots e)\, e''\,(*a'e \cdots e) \cdots (*e'' e \cdots e)\, e'' =$$

$$= *\underbrace{ae'' \cdots e''}_{k} a' e'' \cdots e'',$$

ако се стави $a'' = *\underbrace{e'' \cdots e''}_{k+1} a' e'' \cdots e''$, ќе се добие (2. 4).

Со оглед на теоремата на Robinson и погоре добиените резултати, нашето внимание можеме понатака да го усретсредиме на n-полугрупите во кои е точна некоја од следните аксиоми:

A. За секој $x \in S$ и секој o-неутрален елемент e од S постои $x' \in S$ таков да

(2. 5) $$*x' e \cdots ex = e,$$

B. За секој $x \in S$ постојат $e, x' \in S$, каде e е o-неутрален елемент, такви да

(2. 6) $$*xe \cdots ex' = e,$$

C. За секој $x \in S$ постојат $e, x' \in S$, каде e е o-неутрален елемент, такви да

(2. 7) $$*x' e \cdots ex = e.$$

Нека ја докажеме следната

Теорема 3. *Во секоја n-полугрупа $S(*)$ со барем еден o-неутрален елемент аксиомите A, B и C се еквивалентни.*

Доказ. Бидејќи од A следува C, ќе покажеме дека (a) од C следува B и (b) од B следува A.

(a). Нека е точна аксиомата C и нека $*xe \cdots ex' = e'$. Заменувајќи го e' во $*e'e \cdots ee'$, користејќи го асоцијативниот закон и равенството $*x'e \cdots ex = e$, ќе добиеме дека

(2. 8) $$*e' e \cdots ee' = e'.$$

Спрема C постојат $e'', p \in S$, каде e'' е o-неутрален елемент, такви да $*pe'' \cdots e'' e' = e''$. Тогаш,

$$e'' = *pe'' \cdots e''\,(*e' e \cdots ee') = *(*pe'' \cdots e'' e')\, e \cdots ee' = *e'' e \cdots ee',$$

поради што се добива и

$$e = *ee'' \cdots e'' = *ee'' \cdots e''(*e''e \cdots ee') =$$
$$= *(*ee'' \cdots e'')e \cdots ee' = *e \cdots ee'.$$

Со помош на равенството $*e \cdots ee' = e$, исто како и при доказот на лемата 3, може да се покаже дека e' е o-неутрален елемент и дека

$$*xe' \cdots e'x' = *xe \cdots ex' = e',$$

со што се добива дека во S е точна и аксиомата B.

(b). Нека во S е точна аксиомата B. Ако ставиме $*x'e \cdots ex = s$, исто како и за (2. 8) ќе добиеме дека $*se \cdots es = s$. Бидејќи пак постојат o-неутрален елемент e'' и елемент p од Sтакви да $*se'' \cdots e''p = e''$, со помош на равенството $*se \cdots es = s$, користејќи го асоцијативниот закон, се добива дека $*se \cdots ee'' = e''$, а потоа, ако се земе предвид дека $*ee'' \cdots e'' = e$, ќе се добие и $*ese \cdots e = e$ и конечно $*e \cdots es = e$.

Нека $\bar{e}$ е произволен o-неутрален елемент во S и нека ставиме $x'' = *(*\bar{e}e \cdots ex')e \cdots e\bar{e}$. Бидејќи,

$$*x''\bar{e} \cdots \bar{e}x = *(*(*\bar{e}e \cdots ex')e \cdots e\bar{e})\bar{e} \cdots \bar{e}x =$$
$$= *(*\bar{e}e \cdots ex')e \cdots e(*e\bar{e} \cdots \bar{e})x =$$
$$= *(*\bar{e}e \cdots ex')e \cdots ex = *\bar{e}e \cdots e(*x'e \cdots ex) =$$
$$= *\bar{e}e \cdots es = *\bar{e}e \cdots e(*e \cdots e)s =$$
$$= *\bar{e}e \cdots e(*e \cdots es) = *\bar{e}e \cdots e = \bar{e},$$

добивме дека во S е точна и аксиомата A. Теоремата е докажана.

Секоја n-полугрупа $S(*)$ во која е точна некоја од аксиомите A, B и C ќе ја означиме со S^* и целта ќе ни биде да ја опишеме структурата на таквите n-полугрупи. Најнапред нека ја докажеме следната

Лема 4. *Нека* **e** *е o-неутрален елемент во n-полугрупата S^* Тогаш од $*ae \cdots ec = *be \cdots ec$ следува $a = b$.*

Доказ. Нека ставиме $*ae \cdots ec = *be \cdots ec = s$ и нека $p \in S$ биде таков да $*pe \cdots es = e$. Тогаш спрема доказот на теоремата 3 имаме дека $*se' \cdots e'p = e'$, каде e' е o-неутрален елемент определен со $*se \cdots ep = e'$. Пак спрема доказот на последната теорема имаме дека $*ae \cdots ec = *ae' \cdots e'c$ и $*be \cdots ec = *be' \cdots e'c$, па

$$e' = *se \cdots ep = *(*ae \cdots ec)e \cdots ep =$$
$$= *(*ae' \cdots e'c)e \cdots ep = *ae' \cdots e'(*ce \cdots ep),$$

и слично, $e' = *be' \cdots e'(*ce \cdots ep)$. Ако ставиме $*ce \cdots ep = k$, имаме $*ae' \cdots e'k = *be' \cdots e'k = e'$. Спрема доказот на теоремата 3 можеме да избериме o-неутрален елемент e'' таков да $*ke' \cdots e'a = e''$ и да за секои $x, y \in S^*$ е $*xe'' \cdots e''y = *xe' \cdots e'y$. Ако во последното равенство замениме $y = e''$ ќе добиеме дека за секој $x \in S^*$ е $*xe' \cdots e'e'' = x$, па

$$a = *ae' \cdots e'e'' = *ae' \cdots e'(*ke' \cdots e'a) =$$
$$= *(*ae' \cdots e'k)e' \cdots e'a = *(*be' \cdots e'k)e' \cdots e'a =$$
$$= *be' \cdots e'(*ke' \cdots e'a) = *be' \cdots e'e'' = b.$$

На крај, ќе ја докажеме следната

Теорема 4. *За секоја n-полугрупата S^* постои n-група G и непразно множество A такви да S^* е изоморфна со n-полугрупата $G \times A$ во која операцијата „$*$" е дефинирана со равенството* (1. 1).

Доказ. Нека A е некое множество еквивалентно со множеството од сите o-неутрални елементи од S^* и нека $G_a = \{e_a \cdots e_a x; x \in S\}$, каде e_a е o-неутрален елемент од S^*. Очевидно, e_a е n-неутрален елемент во G_a. Бидејќи за секои $x_0, x_1, \cdots, x_n \in G_a$ е $*x_0 x_1 \cdots x_n = *(*e_a \cdots e_a x_0) x_1 \cdots x_n = *e_a \cdots e_a (*x_0 x_1 \cdots x_n) \in G_a$, имаме дека G_a е n-подполугрупа од S^*. Нека покажиме дека G_a е n-подгрупа од S^*. За секој $x \in G_a$ постои $y \in S^*$ таков да $*ye_a \cdots e_a x = e_a$, а тогаш од

$$*ye_a \cdots e_a x = *e_a \cdots e_a = *e_a \cdots e_a(*ye_a \cdots e_a x) = *(*e_a \cdots e_a y)e_a \cdots e_a x$$

спрема лемата 4 следува $y = *e_a \cdots e_a y$, т. е. $y \in G_a$, па дека G_a е n-подгрупа од S^* сега следува од теоремата 2.

Очевидно е дека секоја n-подгрупа G_a е и десен идеал од S^*. Бидејќи пак за секој $x \in S^*$ постојат o-неутрален еленент e_a и елемент y од S^* такви да $e_a = *xe_a \cdots e_a y$, како и малку погоре добиваме дека $*xe_a \cdots e_a y = *(*e_a \cdots e_a x)e_a \cdots e_a y$, а спрема лемата 4 имаме тогаш дека секој елемент $x \in S^*$ се содржи во некоја нејзина n-подгрупа G_a, т. е. S^* е унија од фамилијата $F = \{G_a; a \in A\}$ свои n-подгрупи, секоја од кои е и десен идеал од S^*, па доказот на теоремата следува од теоремата 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Clifford, A System arising from a weakened set of group postulates, Annals of Math. 34 (1933), 865—871.

[2] G. Čupona, On completely simple semigroups, Glasnik mat. fiz. astr. 18 (1963), 159 — 163

[3] E. L. Post, Polyadic groups, Trans. of the Amer. Math. Soc., 1940, 208—350

[4] D. W. Robinson, n-Groups with identity elements, Math. Mag. 31 (1958), 255—258

[5] Е. С. Ляпин, Полугруппы, Москва, 1960.

B. L. Trpenovski

ON SOME n-SEMIGROUPS WHICH ARE UNIONS OF n-GR UPS

(Summary)

In this note we regarde a class of n-semigroups which is a generalization of the class of semigroups regarded in [1]; at first, we generalize one of the results of [2] from binary to $(n+1)$—ary case.

Theorem. Let S $(*)$ be an n-semigroup and let $\{G_a;\ a\epsilon A\}$ be a collection of right ideals of S. If $S=\underset{a\epsilon A}{U}G_a$, and if every G_a is an n-subgroup of S, then there is an n-group $G(*)$ such that $S(*)\cong G\times A(o)$, where

$$(*)\qquad o(x_0, a_0)\ (x_1, a_1)\dots\ (x_n, a_n)=(*x_0\,x_1\dots x_n, a_0),$$
$$x_0, x_1, \dots, x_n\,\epsilon\, G;\ a_0, a_1, \dots,\ a_n,\ \epsilon\, A.$$

Lemma. If e is an i—neutral element in an n-semigroup S and if $i\neq o$ $(i\neq n)$, than e is an n-neutral (o-neutral) element, too.

Lemma. If $S(*)$ is an n-semigroup and if $*e\dots ea'e\dots eae\cdots e=e$, where e is a o-neutral element, then there is an element $a''\in S$ such that $*a''\,e\dots e\,a=e$.

Lemma. Let a be an element of the n-semigroup $S(*)$. If there are $a', e\,\epsilon\, S$, where e is a o-neutral element, such that $*e\dots e\,a\,e\dots e\,a'\,e\dots e=e$, then there are $a'', e'\,\epsilon\, S$, where e' is also a o-neutral element such that $*ae'\dots e'\,a''=e'$.

Theorem. Let $S(*)$ be an n-semigroup with, at least one, o-neutral element. The following statements are equivalent in S:

A. For every $x\epsilon S$ and every o-neutral element e there is an element $x'\,\epsilon\, S$ such that $*x'\,e\dots e\ x=e$.

B. For every $x\,\epsilon\, S$ there are $e, x'\,\epsilon\, S$, where e is a o-neutral element, such that $*x\,e\dots e\ x'=e$;

C. For every $x\in S$ there are $e, x'\,\epsilon\, S$, where e is a o-neutral element, such that $*\,x'\,e\dots e\ x=e$.

The main result of this note is the following

Theorem. For any n-semigroup S in which the statements A, B and C hold there are an n-group $G\,(*)$ and a *non*-empty set A such that $S\cong G\times A\,(o)$, where the operation „o“ is defined by $(*)$.