ЗА ЕДЕН СТАВ НА ВЕКТОРСКАТА АЛГЕБРА

В. ЈАНЕКОСКИ

По векторски пат, ќе биде докажан познатиот став: мешаниот производ на три вектора не се менува ако се изврши циклична замена на истите.

Користејќи го дистрибутивниот закон за векторско и скаларно множење, за три произволни вектора **a**, **b**, **c**, важи

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

и од тука

$$[\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}). \tag{1}$$

Векторскиот производ на два вектора е нормален на секој од двата вектора, пак е

$$[\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = o, \tag{2}$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = o, \ (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = o. \tag{2'}$$

Поради дистрибутивноста на скаларниот производ, а со оглед на (2′), изразите $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$ и $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$ стануваат респективно $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ и $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$. Земајќи во предвид (2) и (2′), релацијата (1) може, сега, да се напише како

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = o,$$

откаде, поради алтернативноста на векторскиот производ: $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, произлегува

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}, \tag{3}$$

што го докажува ставот.

Burali — Forti и Marcolongo*) ја добиваат релацијата (3) користејќи ја особината на двојниот векторски производ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ истиот да може по векторот **b** да се изрази на два начина. Се нагласува, исто така, дека доказот на овие автори, во сашност, е заснован на дистрибутивниот закон за скаларно и векторско множење.

---

*) **Elementi di Calcolo vettoriale,** seconda edizione, Bologna 1921, p. 32.

V. Janekoski, Skopje

SUR UN THÉORÈME DE L' ALGÈBRE VECTORIELLE

Résumé

Tenant compte de la distributivité par rapport à l'addition des multiplications vectorielle et scalaire, pour les vecteurs quelconques $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ on a

$$[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}+\mathbf{a})]\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})=(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a}). \tag{1}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs, étant perpendiculaire à chacun de ses facteurs, il s' ensuit que

$$[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}+\mathbf{a})]\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})=(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times\mathbf{c}=(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\times\mathbf{a}=0.$$

Les expressions $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})$ et $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})$ deviennent respectivement $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times\mathbf{a}$ et $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\times\mathbf{c}$ et pour (1) on déduit tout de suite

$$(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\times\mathbf{c}=0,$$

ce qui, à cause de la propriété d' alternance du produit vectoriel, démontre la propriété bien connue: *le produit mixte reste invariable si l' on effectue une permutation circulaire de ses facteurs.*

Burali — Forti et Marcolongo*) obtiennent le resultat précédent grâce à la propriété du double produit vectoriel $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$ que le même peut s'exprimer par le vecteur $\mathbf{b}$ de deux façons. Il faut souligner ici que la démonstration de ces auteurs est fondée, en réalité, sur la propriété distributive des multiplications scalaire et vectorielle.