ВЕЗА ИЗМЕЂУ $R_{\lambda,1}$ ПОСТУПКА И σ^α ПОСТУПКА ЗБИРЉИВОСТИ

БРАНИСЛАВ МАРТИЋ

Нека је $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ма какав низ позитивних бројева. Ако количник

$$R\lambda_{,1}\{s_n\} \stackrel{def}{=\!=} \frac{\sum_{\nu=o}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=o}^{n} \lambda_\nu} \tag{1}$$

тежи одређеној граничној вредности s, кад $n \to \infty$, онда кажемо да је низ s_n $R\lambda_{,1}$ збирљив односно да је збирљив Riesz — овим поступком реда 1 ([2] стр. 470.).

Нека је за $\alpha > -1$

$P_0(\alpha) = 1;\; P_n(\alpha) = (\alpha+1)\;(\alpha+2)\ldots(\alpha+n),\; n = 1, 2, \ldots$

Нека је даље за $n = 1, 2, \ldots$ и $0 \leqslant \nu \leqslant n$

$$\sigma_0^0(\alpha) = 1;\; (x+\alpha)\,(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+n-1) = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, x^\nu\,.$$

Ако

$$\sigma_n^\alpha\{s_n\} \stackrel{def}{=\!=} = \frac{1}{P_n(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_n(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_\nu$$

конвергира ка вредности s, онда кажемо да је низ s_n σ^α збирљив тој вредности [3].

У овом ћемо раду изложити везу између $R\lambda_{,1}$ и σ^α поступака збирљивости.

Теорема I. Из

$$R\lambda_{,1}\{s_n\} \to s,\; n \to \infty$$

следи

$$\sigma_n^\alpha\{s_n\} \to s,\; n \to \infty$$

ако је задовољен потребан и довољан услов

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu}-\frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}}\right|\sum_{k=0}^{\nu}\lambda_k=0\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)\right\}, n\to\infty. \tag{2}$$

Из теореме I можемо добити две једноставније али и специјалније теореме:

Теорема 2. Из

$$R_{\lambda,1}\{s_n\}\to s, n\to\infty$$

следи

$$\sigma_n^\alpha\{s_n\}\to s, n\to\infty$$

ако је задовољен услов

$$\frac{\sigma_k^n(\alpha)}{\lambda_k}\geqslant\frac{\sigma_{k+1}^n(\alpha)}{\lambda_{k+1}};\ k,\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \tag{3}$$

Теорема 3. Из

$$R_{\lambda,1}\{s_n\}\to s,\ n\to\infty$$

следи

$$\sigma_n^\alpha\{s_n\}\to s,\ n\to\infty$$

ако су задовољени услови

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu}{\lambda_n}=0\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)\right\},\ n=1,\ 2,\dots \tag{4}$$

$$\frac{\sigma_k^n(\alpha)}{\lambda_k}<\frac{\sigma_{k+1}^n(\alpha)}{\lambda_{k+1}},\ k,\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \tag{5}$$

Из ове две последње теореме видимо да из $R_{\lambda,1}$ збирљивости следи σ^α збирљивост ако количник

$$\frac{\sigma_k^n(\alpha)}{\lambda_k};\ k,n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

било монотоно опада било монотоно расте и задовољен је услов (4).

Доказ теореме I. Из (1) је

$$s_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\left\{P_\nu R_\nu-P_{\nu-1}R_{\nu-1}\right\};\ \nu=0,\ 1,\ 2,\dots \tag{6}$$

где je

$$R_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu}; \quad P_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu; \quad R_{-1} = P_{-1} = 0.$$

Ако применимо на низ (6) σ^α поступак добивамо

$$\sigma_n^\alpha \{s_n\} = \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha) \frac{1}{\lambda_\nu} (P_\nu R_\nu - P_{\nu-1} R_{\nu-1}) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+1+\nu)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right] P_\nu R_\nu + \frac{P_n}{\lambda_n} R_n \right\}. \tag{7}$$

У последњем члану десне стране (7) ставили смо $\sigma_n^n(\alpha) = 1$. Ако ставимо да je $s_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ тада je и $\sigma_n^\alpha\{s_n\} = 1$ као и $R_n = 1$ за свако n, па нам (7) даје

$$\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+1+\nu)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_n} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right] P_\nu + \frac{P_n}{\lambda_n} \right\} = 1 . \tag{8}$$

На основу познатих процена ([3] стр. 129—130) а после краћег рачуна имамо за фиксирано ν и $-1 < \alpha$

$$\frac{|\sigma_\nu^n(\alpha)|}{\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)} = 0 \left(\frac{\log^\nu n}{n} \right), n \to \infty ,$$

одакле следи да je за фиксирано ν

$$\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+1+\nu)} \left| \frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right| P_\nu = o(1), n \to \infty . \tag{9}$$

Према томе да би из

$$R_{\lambda,1}\{s_n\} = R_n \longrightarrow s, \; n \longrightarrow \infty$$

следило

$$\sigma_n^\alpha\{s_n\} \longrightarrow s,\ n \longrightarrow \infty$$

потребно је и довољно да су поред два услова (8) и (9) задовољени још и услови ([1] стр. 43):

$$\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right| P_\nu = O_{(1)},\ n \to \infty \tag{10}$$

$$\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \frac{P_n}{\lambda_n} = O(1),\ n \to \infty, \tag{11}$$

Међутим како је на основу (8)

$$\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \frac{P_n}{\lambda_n} = 1 - \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right] P_\nu \leqslant$$

$$1 + \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right| P_\nu,$$

то видимо да из (10) следи (11) чиме је теорема I доказана.

Доказ теореме. 2 Како је

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu) > 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

то обзиром на (3) и (8) имамо

$$0 \leqslant \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right| P_\nu =$$

$$= \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right] P_\nu =$$

$$= 1 - \frac{1}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \frac{P_n}{\lambda_n} < 1, \; n=1, 2, \ldots \tag{12}$$

Обзиром на (12) и теорему I доказ теореме 2 следи непосредно.

Доказ теореме 3. Према (5), (8) и (4) имамо

$$0 \leqslant \frac{1}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{\sigma_{\nu}^{n}(\alpha)}{\lambda_{\nu}} - \frac{\sigma_{\nu+1}^{n}(\alpha)}{\lambda_{\nu+1}} \right| P_{\nu} =$$

$$= -\frac{1}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\sigma_{\nu}^{n}(\alpha)}{\lambda_{\nu}} - \frac{\sigma_{\nu+1}^{n}(a)}{\lambda_{\nu+1}} \right] P_{\nu} =$$

$$= \frac{P_n}{\lambda_n \prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)} - 1 \leqslant K - 1, \; n = 1, 2, \ldots$$

што са теоремом I доказује теорему 3.

LITERATURA

[1] Hardy G. H. Divergent Series. Oxford 1949.
[2] Knopp K. Theory and application of infinite series. New York. Hafner Publishing Company.
[3] Вучковић В. Eine neue Klasse von Polynomen und ihre Anwendung in der Theory der Limitierungsverfahren. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 12, 1958, 125—136.

Branislav Martić, Sarajevo.

THE CONNECTION BETWEEN $R_{\lambda,1}$ AND σ^{α} METHODS OF SUMMATION

Summary

In the paper we give (theorem I) the necessary and sufficient condition for the sequences summable $R_{\lambda,1}$ to be summable σ^{α}. In others two theorems we give simplest but only sufficient condition.