О ТРАНСФОРМАЦИОНОМ ОБРАСЦУ ДВОСТРУКОГ ВЕКТОРСКОГ ПРОИЗВОДА И ЈЕДНОЈ ЊЕГОВОЈ ПРИМЕНИ НА ДИСТРИБУТИВНИ ЗАКОН ЗА ВЕКТОРСКО МНОЖЕЊЕ

В. Јанекоски

За доказивање трансформационог обрасца двоструког векторског производа

(1) $$(a \times b) \times c = (c \cdot a)\, b - (b \cdot c)\, a$$

и дистрибутивног закона за векторско множење

(2) $$(a + b) \times c = a \times c + b \times c,$$

где су a, b, c произвољни вектори, у литератури постоје више поступака у у чијим основама, обично, лежи геомстриско или координатно извођење.

У овом прилогу износимо неколико векторских поступака који доводе до обрасца за двоструки производ (1) као и једну примену истога за доказивање дистрибутивног закона за векторско множење (2).

1. 1. До обрасца за двоструки векторски производ у основном облику (1) долазимо преко редуктивног елемента

(3) $$[(a \times b) \times c] \times (a \times b) = (a \times b)^2 c - [(a \times b) \cdot c]\, a \times b$$

чији образац (3) — с обзиром на правило размене скаларног и векторског множења у мешовитом производу $\{[(a \times b) \times c] \times (a \times b)\} \cdot c$ и тривијалан *Lagrange*-ev идентитет

$$(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 b^2$$

примењен на векторе $a \times b$ и c — лако доказујемо скаларним множењем обеју страна од (3) векторима $a \times b$ и c. У случају колинеарности вектора $a \times b$ и c (3) се одмах верификује сменом $c = \lambda (a \times b)$, где је λ један скалар.

Ако сада, за двоструки векторски производ трију произвољних вектора a, b, c ставимо

(1′) $$(a \times b) \times c = \alpha a + \beta b$$

(α, β — скаларни коефицијенти)

и помножимо векторски обе стране једначине (1′) вектором $a \times b$, на основу дистрибутивног закона (2), имамо

$$(4) \qquad [(a\times b)\times c]\times(a\times b)=\alpha a\times(a\times b)+\beta b\times(a\times b).$$

Како, је на основу правила цикличне замене у мешовитом производу

$$[b\times(a\times b)]\cdot a=(a\times b)^2=-[a\times(a\times b)]\cdot b$$

скаларним множењем једначине (4) векторима a и b, с обзиром на (3) за коефициенте разлагања α, β добијамо

$$(5) \qquad \alpha=-b\cdot c,\quad \beta=c\cdot a,$$

што је и требало доказати. Случај колинеарности вектора a и b се верификује сменом $b=\lambda a$, где је λ један скалар.

Аналогним поступком се добија исти резултат (5) и помоћу редуктивног елемента

$$(3') \qquad [(a\times b)\times c]\times c=[(a\times b)\cdot c]\,c-c^2 a\times b$$

и одговарајуће једна ине

$$(4') \qquad [(a\times b)\times c]\times c=\alpha a\times c+\beta b\times c,$$

(α, β — скаларни коефицијенти)

при чему сада треба показати да (5) важи и у случају компланарних вектора a, b, c; заиста, образац (1) остаје непромењен ако се у њему вектор c замени вектором $c+\omega(a\times b)$, где ј3 ω један скалар. *Chazy* [1], за компланарне векторе a, b, c, доказује образац (1) множећи обе његове стране скаларно и векторски вектором c позивајући се при томе на адициону теорему функције *sinus*.

1.2. Релацију

$$(6) \qquad (a\times b)^2 c=(b\cdot c)(a\times b)\times a+(c\cdot a)(b\times a)\times b+[(a\times b)\cdot c]\,a\times b$$

– која се, водећи рачуна о правилу цикличне замене у мешовитом производу трију вектора, доказује скаларним множењем исте векторима a, b, $a\times b$ можемо искористити за доказивање обрасца (1) на следећи начин. Ако образујемо израз $(a\times b)\times c$ $(a\times b\neq 0)$, при чему је вектор c дат са (6), на основу дистрибутивног закона за векторско множење (2) добијамо

$$(7) \qquad (a\times b)\times c=\frac{a\times b}{|a\times b|}\times\left\{\frac{a\times b}{|a\times b|}\times[(b\cdot c)a-(c\cdot a)b]\right\}$$

чиме се проблем своди на одређивање вектора облика $n^\circ\times(n^\circ\times b)$, где је n° орт нормалан на раван у којој лежи произвољан вектор v. По дефиницији векторског производа, вектор $n^\circ\times(n^\circ\times v)$ показује да, у датој равни, треба вектор v, около свога почетка, два пута у директном смеру обрнути за угао од по $\pi/2$ тако да исти вектор v сада прелази у вектор — v т. ј.,

$$(8) \qquad n^\circ\times(n^\circ\times v)=-v.$$

Пошто је, сада, у нашем случају

$$(9) \qquad n^{\circ} = (a \times b)/|a \times b| \quad v = (b \cdot c)a - (c \cdot a)b,$$

за двоструки векторски производ $(a \times b) \times c$ од (7), (8) и (9) добијамо исти, образац (1).

2. Нека при доказивању обрасца за двоструки векторски производ (1) није укључена примена дистрибутивног закона за векторско множење (2)*). Онда образац (1) може послужити за доказивање дистрибутивног закона за векторско множење збира n ($n>1$ природан број) произвољних вектора a_i једним вектором b $(b \neq 0)$

$$(2') \qquad (\Sigma a_i) \times b = \Sigma (a_i \times b).$$

на следећи начин.

Ставимо ли

$$(10) \qquad G \equiv (\Sigma a_i) \times b, \quad b \equiv B \times C,$$

израз G, према обрасцу (1), сада гласи

$$G \equiv [(\Sigma a_i) \cdot C]\, B - [(\Sigma a_i) \cdot B]\, C$$

одакле, с обзиром на дистрибутивност скаларног производа вектора, добијамо

$$G \equiv [\Sigma (a_i \cdot C)]\, B - [\Sigma (a_i \cdot B)]\, C$$

што се може написати и као

$$(11) \qquad G \equiv \Sigma\, [(a_i \cdot C)\, B - (a_i \cdot B)\, C].$$

Како се израз у средњој загради последње једнакости (11), према обрасцу (1), може претставити као двоструки векторски производ вектора a_i, B, C, сада за (11) имамо

$$G \equiv \Sigma\, [a_i \times (B \times C)],$$

што је, с обзиром на (10), и требало доказати.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chazy J., *Sur la formule du double produit vectoriel* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. t. 211, 1940, p. 449).

[2] Janekoski V., *Prilog dokazima nekih stavova vektorske algebre* (Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, t. VIII 1—2, 1956, p. 69.

---

*) Видети, на пример, {[2], p.: 68, 69.}

Résumé

SUR LA FORMULE DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL ET LA PROPRIÉTÉ DE DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION VECTORIELLE

V. Janekoski, Skopje

Dans cette Note l'auteur expose quelques procédés vectoriels pour démontrer la formule du double produit vectoriel (1) et donne une transformation (10) par laquelle, à l'aide de la formule du double produit vectoriel (1) {v. [2], p. 69} on peut démontrer la propriété de distributivité de la multiplication vectorielle par rapport à l'addition (2').