ELIMINO DE LA AREOINTEGRALOJ EL EKVACIOJ DE PLANEDPERTURBOJ EN VEKTORAJ ELEMENTOJ

(Bož. Popović, Sarajevo)

En la problemo de **n** ĉielkorpoj oni konas 10 skalarajn integralojn. Sed kutime oni ne utiligas ilin ĉiujn dum integrado de la ekvacioj, ĉar mankas la konvenaj diferencialaj ekvacioj kun eliminitaj 10 integraloj. Iam oni utiligas la ekvaciojn kun eliminitaj 6 integraloj de la pezcentro, lau la konata Jacobi-metodo (*Jacobi-koordinatoj*) [1], [2]. Sed la areointegralojn kaj la integralon de la viva forto oni ne povas facile elimini el la diferencialaj ekvacioj por tiel malplialtigi la ordon de la ekvacioj. *Jacobi* en [1] donas 5 ekvaciojn de la unua ordo kaj 1 ekvacion de la dua ordo (kun aldona kvadraturo por la nodo), sed la nekonatoj ne estas rekte la elementoj, sed ilia kombinaĵo kun diversaj aliaj kvantoj. Fakte jam *Lagrange* [3] malplialtigis la ekvaciordon al 7, preninte la radiusojn kiel la nekonatojn. Oni povas sukcese elimini ĉiujn konatajn integralojn preninte por la nekonatoj la „vektorajn elementojn": **c**, **e** (areovektoro kaj perihelia vektoro). Utiligante la vektoran formon de la ekvacioj, mi donas ĉi tie la kontribuon por elimino de la integraloj, gardante vektorajn elementojn kiel la nekonatoj.

Por du planedoj estas facile doni la vektoran formon de la moviĝ-ekvacioj kun eliminita mezpunkto (v. [4]), rekte per utiligo de la mezpunkto de du unuaj korpoj kiel la krucpunkto por la tria korpo (kiel oni difinas la koordinatojn de Jacobi). Tion mi faros ankaŭ por *n* planedoj (parto **1**) same rekte per transiro de unu al alia mezpunkto, ne trans la kondiĉoj pri linea ligiteco de malnovaj kaj novaj koordinatoj, kiel faras ekz. *Charlier* ([1], ĉ. V, 4), ĝeneraligante la metodon de *Jacobi* el [2]. En la dua parto mi eliminos aliajn 4 integralojn por la kazo de du planedoj, kun tre konvenaj ekvacioj, kaj en la tria parto mi ĝeneraligos tion por la la kazo de *n* planedoj (kvankam oni tiam ne trovas tiel konvenajn ekvaciojn en nur vektoraj elementoj).

I

Signu per S punkton en kiu troviĝas Suno (la maso M), per P kaj P_i (i=1, 2, 3, . . ., n—1) punktojn en kiuj troviĝas la esplorata planedo kaj aliaj (n—1) planedoj (la masoj m kaj m_i). Iliaj pozici-vektoroj rilate la Sunon estu $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_i$ kaj rilate la mezpunkton G ili estu $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_i$. La vektoroj de la esplorata planedo al aliaj planedoj estu $\mathbf{p}_i$. La mezpunkto por la Suno kaj la esplorata planedo estu G_0, por G_0 kaj la planedo P_1 estu G_1, por G_1 kaj P_2 ĝi estu G_2 ktp. Fine la pozicivektoro de P_1 rilate G_0 estu $\mathbf{q}_1$ de P_2 rilate G ĝi estu $\mathbf{q}_2$ ktp.

Laŭ la agantaj altirfortoj ni havas la moviĝekvaciojn:

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} = -\dfrac{M\mathbf{r}_i}{r_i^3} - \dfrac{m\mathbf{p}_i}{p_i^3} + \sum\limits_{j\neq i} m_j \dfrac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|^3}, \quad i = 1, 2, \cdots n-1 \\[2ex] \dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\dfrac{M\mathbf{r}}{r^3} + \sum\limits_j \dfrac{m_j\,\mathbf{p}_j}{p_j^3}, \quad \dfrac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2} = \dfrac{m\mathbf{r}}{r^3} + \sum\limits_j \dfrac{m_j\,\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad \text{(por Suno).} \end{cases}
$$

La vektoroj $\mathbf{q}_i$ estas ligitaj kun aliaj vektoroj per

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{M+m}\,\mathbf{r} + \mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \dfrac{m_1}{M+m+m_1}\,\mathbf{q}_1 + \dfrac{m}{M+m}\,\mathbf{r} + \mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_2, \\[2ex] \dfrac{m}{M+m}\,\mathbf{r} + \dfrac{m_1}{M+m+m_1}\,\mathbf{q}_1 + \dfrac{m_2}{M+m+m_1+m_2}\,\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{r}_3, \cdots, \end{cases}
$$

de kie

$$
(3)\quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m\mathbf{r}}{M+m}, \cdots, \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \frac{m\mathbf{r} + m_1\,\mathbf{r}_1 + \cdots + m_{i-1}\,\mathbf{r}_{i-1}}{M+m+m_1+\cdots+m_{i-1}}.
$$

Konsiderinte ankoraŭ

$$
(4)\quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0,
$$

oni havos

$$
(5)\quad \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i - \frac{M\mathbf{R}_0 + m\mathbf{R} + \cdots + m_{i-1}\,\mathbf{R}_{i-1}}{M+m+m_1+\cdots+m_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots n-1.
$$

Nun oni povas apliki rekte la ekvaciojn (1) kaj ricevi

$$
(6)\quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{(M+m)\mathbf{r}}{r^3} + \sum_j m_j\left(\frac{\mathbf{p}_j}{p_j^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad \frac{d^2\mathbf{q}_i}{dt^2} = &-\left(\frac{M\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \frac{m\mathbf{p}_i}{p_i^3}\right) + \sum_{j\neq i} m_j \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0|^3} - \frac{1}{M_{i-1}}\left[M\sum \frac{m_j\,\mathbf{r}_j}{r_j^3} + m\sum \frac{m_j\mathbf{p}_j}{p_j^3} - \right. \\
&\left. -\sum_{j=1}^{i-1} m_j\left(M\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + m\frac{\mathbf{p}_j}{p_j^3}\right) + \sum_{j\neq k}\sum_{k=1}^{i-1} m_j\, m_k \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k|^3}\right] = -\left(M\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \frac{m\mathbf{p}_i}{p_i^3}\right) - \\
&-\frac{1}{M_{i-1}}\sum_{j=i}^{n-1} m_j\left(M\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + m\frac{\mathbf{p}_j}{p_j^3}\right) + \sum_{j\neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{M_{i-1}}\sum_{k\neq j=i}^{n-1} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3},
\end{aligned}
$$

kun $\mathbf{r}_i$ el (2) kaj

(8) $$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r} = -M\mathbf{r} + \frac{m_1}{M_1}\mathbf{q}_1 + \cdots + \frac{m_{i-1}}{M_{i-1}}\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{q}_i,$$

(9) $$M + m = 1, \quad M + m + m_1 + \cdots + m_i = M_i.$$

En (6) kaj (7) ni havas la sendependan sistemon de n vektoraj diferencialaj ekvacioj por n planedoj (kaj Suno). La ordo estas malplialtigita por 3 skalaraj ekvacioj de la dua ordo, utiliginte fakte — per (4) — la integralojn de la pezpunkto.

Speciale por du planedoj prenu la signojn $\mathbf{q}$ kaj $\mathbf{p}$ anstataŭ $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_1$, kaj la ekvacioj fariĝos

(10) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{r}{\mathbf{r}^3} + m_1\left(\frac{\mathbf{p}}{p^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\right), \quad \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -(1+m_1)\left(\frac{M\mathbf{r}_1}{r_1^3} + m\frac{\mathbf{p}}{p^3}\right),$$

(11) $$\mathbf{r}_1 = m\mathbf{r} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{q} - M\mathbf{r}.$$

Al la ekvacioj (10) oni povas doni la formon

(12) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}, \quad \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\nu\frac{\mathbf{q}}{q^3} + \mathbf{G}, \quad \nu = M(1+m_1),$$

kun

13 $$\mathbf{F} = -m_1\left(\frac{M\mathbf{r} - \mathbf{q}}{|M\mathbf{r} - \mathbf{q}|^3} + \frac{m\mathbf{r} + \mathbf{q}}{|m\mathbf{r} + \mathbf{q}|^3}\right), \quad \mathbf{G} = +m(1+m_1)\frac{M\mathbf{r} - \mathbf{q}}{|M\mathbf{r} - \mathbf{q}|^3} - \nu\left(\frac{m\mathbf{r} + \mathbf{q}}{|m\mathbf{r} + \mathbf{q}|^3} - \frac{\mathbf{q}}{q^3}\right),$$

Ili povas esti skribitaj ankaŭ en la vektora kanona formo

(14) $$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(T+U), & \dfrac{d\mathbf{q}}{dt} = +\operatorname{grad}_{\mathbf{w}}(T+U), \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(T+U), & \dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{q}}(T+U), \end{cases}$$

kun

(15) $$\mathbf{v} = \mu\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \mu_1\frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mu = Mm\left(= \frac{Mm}{M+m}\right), \quad \mu_1 = \frac{m_1}{1+m_1}\left(= \frac{m_1(M+m)}{M+m+m_1}\right)$$

(16) $$2T = \mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \mu_1\dot{\mathbf{q}}^2 = \frac{1}{\mu}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{\mu_1}\mathbf{w}^2,$$

(17) $$-U = \frac{mm_1}{|\mathbf{q} - M\mathbf{r}|} + \frac{Mm_1}{|\mathbf{q} + M\mathbf{r}|} + \frac{Mm}{\mathbf{r}}.$$

Same la vektora kanona formo por $(n+1)$ korpoj, laŭ (6) kaj (7), estas

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = +\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(T+U), & \dfrac{d\mathbf{q}_i}{dt} = +\operatorname{grad}_{\mathbf{w}_i}(T+U), \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(T+U), & \dfrac{d\mathbf{w}_i}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{q}_i}(T+U), \end{cases}$$

kun

$$(19)\quad \mathbf{v}=\mu\frac{d\mathbf{r}}{dt},\quad \mathbf{w}_i=\mu_i\frac{d\mathbf{q}_i}{dt},\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$$(20)\quad \begin{cases} 2T=\mu\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\mu_j\left(\dfrac{d\mathbf{q}_j}{dt}\right)^2=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{v}^2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{\mu_j}\mathbf{w}_j^2, \\ -U=\dfrac{\mu}{r}+M\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{m_j}{r_j}+m\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{m_j}{p_j}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j\neq k}\dfrac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_k|}, \end{cases}$$

$$(21)\quad \mu=Mm,\quad \mu_i=\frac{m_i M_{i-1}}{M_i}=m_i\left(1-\frac{m_i}{M_i}\right),\quad M_i \text{ el } (9).$$

Integraloj de la sistemo (10) estas

$$(22)\quad \mu\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]+\mu_1\left[\mathbf{q}\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right]=\mathbf{C}=\mathbf{const.}$$

$$(23)\quad T+U=h,\quad h=\text{const.},$$

kun T kaj U el (16), (17), kaj integraloj de la sistemo (6), (7) estas

$$(24)\quad \mu\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\left[\mathbf{q}_j\frac{d\mathbf{q}_j}{dt}\right]=\mathbf{C}=\mathbf{const.}$$

$$(25)\quad T+U=h,\quad h=\text{const.},$$

kun T kaj U el (20).

Estas grave mencii ankoraŭ ke el (5) kun

$$M\mathbf{R}_0+m\mathbf{R}+m_1\mathbf{R}_1+\cdots+M_{n-1}\mathbf{R}_{n-1}=0,$$

sekvas

$$(26)\quad \mathbf{R}_{n-1}=\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}\mathbf{q}_{n-1},\quad \mathbf{R}_{n-2}=\frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}\mathbf{q}_{n-2},-\frac{m_{n-1}}{M_{n-1}}\mathbf{q}_{n-1},$$

$$\mathbf{R}_{n-j} = \frac{M_{n-j-1}}{M_{n-j}} \mathbf{q}_{n-j} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_{n-k}}{M_{n-k}} \mathbf{q}_{n-k}$$

$$(27) \qquad \mathbf{R}_i = \mathbf{q}_i - \sum_{j=i}^{n-1} \frac{m_j}{M_j} \mathbf{q}_j, \quad \mathbf{R} = M\mathbf{r} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{M_j} \mathbf{q}_j, \quad \mathbf{R}_0 = -m\mathbf{r} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{M_j} \mathbf{q}_j$$

$$(28) \qquad \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k + \sum_{s=k}^{j-1} \frac{m_s}{M_s} \mathbf{q}_s$$

2

Por la vektoraj elementoj

$$(29) \qquad \mathbf{c} = \left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right], \quad \mathbf{c}_1 = \left[\mathbf{q}\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right]$$

$$(30) \qquad \mathbf{e} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{c}\right] - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_1 = \left[\frac{d\mathbf{q}}{dt}\mathbf{c}_1\right] - \frac{\nu\mathbf{q}}{q} \quad \left[\nu = M\ (1 + m_1)\right]$$

estas konataj (ekz. [5], p. 133) la perturboekvacioj

$$(31) \qquad \frac{d\mathbf{c}}{dt} = [\mathbf{r}\,\mathbf{F}], \quad \frac{d\mathbf{c}_1}{dt} = [\mathbf{q}\mathbf{G}],$$

$$(32) \qquad \frac{d\mathbf{e}}{dt} = [\mathbf{F}\mathbf{c}] + \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{F}]\right], \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = [\mathbf{G}\mathbf{c}_1] + \left[\frac{d\mathbf{q}}{dt}[\mathbf{q}\mathbf{G}]\right],$$

kie por $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$ kaj iliaj derivoj oni devas preni

$$(33) \qquad \begin{cases} \mathbf{r} = a\ (\cos u - e)\dfrac{\mathbf{e}}{e} + \sqrt{a}\ \sin u\ \dfrac{[\mathbf{c}\mathbf{e}]}{e} \\[2ex] \mathbf{q} = a_1\left(\cos u_1 - \dfrac{e_1}{\nu}\right)\dfrac{\mathbf{e}_1}{e_1} + \sqrt{a_1}\ \sin u_1\ \dfrac{[\mathbf{c}_1\,\mathbf{e}_1]}{e_1} \end{cases}$$

$$(34) \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\cdot\frac{du}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{dt}$$

kun

$$(35) \qquad a = \frac{c^2}{1 - e^2}, \quad a_1 = \frac{c_1^2}{1 - \left(\dfrac{e_1}{\nu}\right)^2},$$

$$(36) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - e\cos u}, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{n_1}{1 - \dfrac{e_1}{\nu}\cos u_1}, \quad n = \frac{1}{a\sqrt{a}}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{\nu}}{a_1\sqrt{a_1}}$$

Por la nekonatoj prenu la kvantojn $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_1$, u_1 kaj kun la sendependa variablo u la ekvacioj (32), (36) donas

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{e}}{du} = a\sqrt{a}\,(1-e\cos u)\,[\mathbf{F}\mathbf{c}] + \left[\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}[\mathbf{r}\mathbf{F}]\right] \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{e}_1}{du} = a\sqrt{a}\,(1-e\cos u)\,[\mathbf{G}\mathbf{c}_1] + \left[\dfrac{\partial\mathbf{q}}{\partial u_1}[\mathbf{q}\mathbf{G}]\right]\cdot\dfrac{\nu a}{a_1}\sqrt{\dfrac{\nu a}{a_1}}\cdot\dfrac{1-e\cos u}{\nu - e_1\cos u_1} \\[2ex] \dfrac{du_1}{du} = \dfrac{\nu a}{a_1}\sqrt{\dfrac{\nu a}{a_1}}\cdot\dfrac{1-e\cos u}{\nu - e_1\cos u_1}. \end{cases}$$

La kvantojn $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$, aperantaj ankoraŭ en ĉi tiuj ekvaćioj, oni povas elimini utiligante la integralojn (22), (23) kaj la ligaĵojn

$$(38)\qquad (\mathbf{c}\mathbf{e}) = o, \quad (\mathbf{c}_1\mathbf{e}_1) = o.$$

Unue el (22) oni havas

$$(39)\qquad \mu_1\mathbf{c}_1 = \mathbf{C} - \mu\mathbf{c}$$

kaj restas nur $\mathbf{c}$. Pro la ligaĵoj (38) oni povas skribi

$$(40)\qquad \mu\mathbf{c} = \xi\,[\mathbf{e}\mathbf{e}_1] - \frac{(\mathbf{C}\mathbf{e}_1)}{[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2}\Big[\mathbf{e}[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]\Big],$$

ĉar la komponanto en la direkto $\mathbf{e}$ ne ekzistas, pro la unua ligaĵo (38), kaj la komponanton en la direkto $\Big[\mathbf{e}[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]\Big]$ oni facile trovas el la dua ligaĵo (38) kun utiligo de (39). Restas por elimino nur ξ, kaj restis ankoraŭ neutiligita la integralo (23). Tie ni enigos $\mathbf{c}$ en la formo (40) kaj $\mathbf{c}_1$ el (39), krom tio a kaj a_1 el (35). Tiam la ekvacio (23) donos implice ξ kiel funkcion de la nekonatoj $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_1$, u_1.

Oni poves iom plisimpligi la ekvaelon (23). Nome el (34) oni trovas

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 = \nu\left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a_1}\right), \quad \nu = M(1+m_1),$$

kaj (23) kun (16) kaj (17) donas

$$-\frac{Mm}{2a} - \frac{Mm_1}{2a_1} + \frac{Mm_1}{q} = \frac{Mm_1}{|\mathbf{q}+m\mathbf{r}|} + \frac{mm_1}{|\mathbf{q}-M\mathbf{r}|} + h$$

$$(41)\qquad \frac{M}{|\mathbf{q}+m\mathbf{r}|} + \frac{m}{|\mathbf{q}-M\mathbf{r}|} - \frac{M}{q} + \frac{M}{2a_1} + \frac{Mm}{2m_1 a} + h_1 = o.$$

Ĉi tie oni devas enmeti la esprimojn (33) por **r**, **q**, poste (40) por **c**,

$$
(42)\quad \begin{cases}
\mu_1 \mathbf{c}_1 = \mathbf{C} - \xi[\mathbf{e}\,\mathbf{e}_1] + \dfrac{(\mathbf{C}\mathbf{e}_1)}{[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2}\Big[\mathbf{e}[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]\Big] \\[2ex]
\mu^2 a = \dfrac{1}{1-e^2}\left\{\xi^2[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2 + \dfrac{(\mathbf{C}\mathbf{e}_1)^2}{[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2}\cdot \mathbf{e}^2\right\} \\[2ex]
\mu_1^2\left(1-\dfrac{e_1^2}{\nu}\right)a_1 = \mathbf{C}^2 - 2\xi(\mathbf{C}\mathbf{e}\mathbf{e}_1) + 2\dfrac{(\mathbf{C}\mathbf{e}_1)}{[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2}\left([\mathbf{C}\mathbf{e}][\mathbf{e}\mathbf{e}_1]\right) + \xi^2[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2 + \dfrac{(\mathbf{C}\mathbf{e}_1)^2}{[\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2}\mathbf{e}^2
\end{cases}
$$

kaj restos nur la nekonato ξ.

Do la problemo (por nur du planedoj) solviĝas per la ekvacisistemo (37), kie **F** kaj **G** estas donitaj per (13), aliaj kvantoj per (33), (34), (42), (40) kaj ξ estas implice donita per (41). Post eltrovo de la nekonatoj **e**, $\mathbf{e}_1$, u_1 kiel funkcioj de u, la dependeco inter u kaj t stariĝas per solvo de la ekvacio

$$a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u)\,du = dt.$$

3

Kiam oni havas pli ol du planedojn, oni ne povas elimini ĉiujn areovektorojn. Sed ili ne povas resti tiaj kiaj ili estas, ĉar unuflanke ili estas ligitaj per la integralo (24), aliflanke en ĉiuj el ili troviĝas po unu superflua skalara nekonato, pro ilia orteco al la periheliaj vektoroj. Fakte kiam oni jam prenas kiel la nekonatoj

$$
(43)\quad \mathbf{e} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]\right] - \frac{\mathbf{r}}{r},
$$

$$
\mathbf{e}_i = \left[\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}\left[\mathbf{q}_i\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}\right]\right] - \nu_i\frac{\mathbf{q}_i}{q_i}\ (i=1,2\ldots n-1),\quad \nu_i = \frac{MM_i}{M_{i-1}}.
$$

– la areovektoroj $\left[\mathbf{q}_i\dfrac{d\mathbf{q}_i}{dt}\right]$ havos nur po 2 skalarajn nekonatojn, pro kio la ekvaciordo ne povas esti malplialtigita se ili restos vektoraj nekonatoj.

Pro tio ankaŭ la solvon por malplialtigo de la ekvaciordo oni devas serĉi jus tie. Esprimu la areovektorojn per du nekonataj skalaroj, ekz. per

$$
(44)\quad \mu_i\mathbf{c}_i = \mu_i\left[\mathbf{q}_i\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}\right] = \xi_i\,[\mathbf{e}\,\mathbf{e}_i] + \eta_i\big[[\mathbf{e}\,\mathbf{e}_i]\,\mathbf{e}_i\big].
$$

Tiam ni havos 6n skalarajn nekonatojn.

Por ankoraŭ elimini 4 skalarajn nekonatojn pere de la integraloj (24), (25), skribu la moviĝekvaciojn (6), (7) en la formo

(45) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}, \quad \frac{d^2\mathbf{q}_i}{dt^2} = -\nu_i \cdot \frac{\mathbf{q}_i}{q_i^3} + \mathbf{F}_i, \quad \nu_i = \frac{MM_i}{M_{i-1}},$$

kun

(46) $$\begin{cases} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{p}_j}{p_j^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \\ \mathbf{F}_i = \nu_i \left(\frac{\mathbf{q}_i}{q_i^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) - \frac{1}{M_{i-1}} \sum_{j=i+1}^{n-1} m_j \left(M \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + m \frac{\mathbf{p}_j}{p_j^3} \right) - \frac{mM_i}{M_{i-1}} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{p_i^3} + \\ \qquad + \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{M_{i-1}} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3}. \end{cases}$$

Tiam ni povas skribi iliam solvon en la formo

(47) $$\begin{cases} \mathbf{q}_i = a_i \left(\cos u_i - \frac{e_i}{\nu_i} \right) \frac{\mathbf{e}_i}{e_i} + \sqrt{a_i} \sin u_i \frac{[\mathbf{c}_i \, \mathbf{e}_i]}{e_i} \\ \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt}, \end{cases}$$

kun

(48) $$\frac{d\mathbf{c}_i}{dt} = [\mathbf{r}_i \, \mathbf{F}_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

(49) $$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = [\mathbf{F}_i \, \mathbf{c}_i] + \left[\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} [\mathbf{r}_i \, \mathbf{F}_i] \right]$$

(50) $$\frac{du_i}{dt} = \frac{\nu_i \sqrt{\nu_i}}{a_i \sqrt{a_i} \, (\nu_i - e_i \cos u_i)}$$

(51) $$a_i = \frac{\nu_i^2 c_i^2}{\nu_i^2 - e_i^2}, \qquad \nu_i = \frac{MM_i}{M_{i-1}}$$

kaj kun analogaj esprimoj por $\mathbf{r}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$, u, a (kie $\nu = 1$).

Se ni ankoraŭ konsideras la signaĵojn (21) por μ_i, el (24) ni havos

(52) $$\mu \mathbf{c} = \mathbf{C} - \mu_1 \mathbf{c}_1 - \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j \mathbf{c}_j .$$

Sed (44) donas

$$\mu_j \, (\mathbf{e}\mathbf{c}_j) = -\eta_j \, [\mathbf{e}\mathbf{e}_j]^2$$

kaj multiplikinte (52) skalare per e ni trovas

$$- \eta_1 [\mathbf{e}\mathbf{e}_1]^2 = (\mathbf{C}\mathbf{e}) + \sum_{j=2}^{n-1} \eta_j [\mathbf{e}\mathbf{e}_j]^2. \tag{53}$$

Restas ankoraŭ esprimi ξ_1 per aliaj nekonatoj, por kio estas je dispono la integralo (25). Al ĝi ni donu la formon similan al (41). Nome el (47) oni trovas

$$\left(\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}\right)^2 = \nu_i \left(\frac{2}{q_i} - \frac{1}{a_i}\right)$$

kaj (25) fariĝas

$$M \sum \frac{m_j}{q_j} = \frac{Mm}{2a} + \frac{M}{2} \sum \frac{m_j}{a_j} + \tag{54}$$

$$+ \left(M \sum \frac{m_j}{r_j} + m \sum \frac{m_j}{p_j} + \sum_{j \neq k} \sum \frac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}\right) + h.$$

El ĉi tiu ekvacio oni ne povas trovi eksplice la kvanton ξ_0, sed ĝi implice determinas ξ_0 kiel la funkcio de aliaj nekonatoj.

Kiam ni fine elektas u kiel la sendependan variablon, ligita kun la tempo per la sama ligaĵo

$$dt = a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u)\,du, \tag{55}$$

tiam la plisimpligita ekvacisistemo havas n vektorajn kaj $3(n-2)+1$ skalarajn nekonatojn: $\mathbf{e}_i$, ξ_i, η_i, u_i $(i = 2, 3 \ldots n-1)$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_1$, u_1. Por skribi la ekvaciojn de ξ_i, η_i ni utiligu (48) kun (44). Ili donas

$$\left\{\begin{aligned} & [\mathbf{e}\mathbf{e}_i]^2 \frac{d\xi_i}{du} = \left([\mathbf{e}\mathbf{e}_i], \mu_i [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] - \xi_i \frac{d}{dt}[\mathbf{e}\mathbf{e}_i] - \eta_i \frac{d}{dt}\big[[\mathbf{e}\mathbf{e}_i]\,\mathbf{e}_i\big]\right) a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u) \\ & [\mathbf{e}\mathbf{e}_i]^2\, \mathbf{e}_i^2 \frac{d\eta_i}{du} = \left(\big[[\mathbf{e}\mathbf{e}_i]\,\mathbf{e}_i\big], \mu_i [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] - \xi_i \frac{d}{dt}[\mathbf{e}\mathbf{e}_i] - \right. \\ & \qquad \left. - \eta_i \frac{d}{dt}\big[[\mathbf{e}\mathbf{e}_i]\,\mathbf{e}_i\big]\right) \cdot a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u) \quad i = 2, 3, \ldots n-1, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

kio kune kun

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{e}}{du} = a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u) \cdot [\mathbf{F}\mathbf{c}] + \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}[\mathbf{r}\mathbf{F}]\right] \\ & \frac{d\mathbf{e}_i}{du} = a\sqrt{a}\,(1 - e\cos u) \cdot [\mathbf{F}_i \mathbf{c}_i] + \left[\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial u_i}[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i]\right] \frac{du_i}{du} \end{aligned}\right. \tag{57}$$

$$\frac{du_i}{du} = \frac{v_i a \sqrt{v_i a}(1 - e\cos u)}{a_i \sqrt{a_i}(v_i - e_i \cos u)}, \quad i = 1, 2, \ldots n - 1, \tag{58}$$

faras la kompletan ekvaci-sistemon. En ĝi estas **c** esprimita pere de (52), η_1 pere de (53) kaj ξ_1 pere de (54).

Per tio la tasko estas solvita kaj la solvo donas la vektorajn elementojn de n planedoj.

MENCIITA LITERATURO

[1] CHARLIER: Die Mechanik des Himmels I, II Auflage, Gruyter und Komp., Berlin—Leipzig 1927.

[2] JACOBI: Sur l'élimination des nodes dans le problème des trois corps, *Astr. Nachrichen* 462 (1843), pp. 81—98.

[3] LAGRANGE: Essai sur le problème des trois corps (Oeuvres, T. VI, pp. 229—334), 1772 (v. Mécanique céleste, de Tisserand, T. I).

[4] МЕРМАН Г. А: Качественные иследования в задаче трех тел, *Бюльтень Института теор. астр.* АН СССР, 6 (1958), № 10, стр. 687—712.

[5] POPOVIĆ B.: Eltrovado de vektoraj elementoj de planedetorbitoj, *Radovi* Naučnog društva XI, Sarajevo 1958, pp. 97—148 (aŭ Specialperturboj de vektoraj elementoj de planedetorbitoj, *Vesnik* Društva matem. i fiz. Beograd, VIII (1956), pp. 47—52.

ELIMINACIJA INTEGRALA POVRŠINA IZ JEDNAČINA PLANETSKIH POREMEĆAJA U VEKTORSKIM ELEMENTIMA

(Bož. Popović, Sarajevo)

Više puta su date (napr. [1], [3]) jednačine u kojima su eliminisani ne samo integrali težišta već i ostali integrali problema tri tela, ali one su odveć komplikovane, ili se kao nepoznate ne javljaju elementi putanje. Autor ovde eliminiše sve poznate integrale, zadržavajući kao nepoznate „vektorske elemente" **c**, **e** (vektor sektorske brzine i periheliski vektor). U I delu su integrali težišta eliminisani direktno, generalizacijom Jacobi-eve metode [2]. U II delu su eleminisana ostala 4 integrala za slučaj dveju planeta, a u III delu za slučaj n planeta.

1) Neka su **r**, $\mathbf{r}_i$ vektori položaja planete P i ostalih (n—1) planeta P_i u odnosu na Sunce, a **R**, $\mathbf{R}_i$ u odnosu na težište sistema; $\mathbf{p}_i$ su položaji planeta P_i prema P, a $\mathbf{q}_i$ njihovi položaji prema sukcesivnim centrima masa (Jacobi). Tada su jednačine kretanja date sa (6), (7), uz (8), (9), odnosno sa (10) za slučaj dveju planeta. Vektorski kanonični oblik je (18), sa oznakama (19—21), a njihovi integrali su (24), (25), odnosno (14—16) za dve planete.

2) Za vektorske elemente (29), (30) jednačine poremećaja su (napr. [5], str. 133) date u (31), (32) i može im se dati oblik (37), gde se $\mathbf{c}_1$ eliminiše preko (39), a **c** implicitno iz (40) i (23), odn. preko (41), gde se koriste (33), (40) i (42).

3) Kod n planeta se za nepoznate uzmu vektori (43), skalari ξ_i, η_i (i=2, 3,... n—1) iz (44) i ekscentrične anomalije u_i (i=1, 2, ... n—1). Preko forme (45) dobijaju se za poremećaje odabranih nepoznatih jednačine (57), (56), (58), gde je **c** izraženo pomoću (52), η_1 pomoću (53) i ξ_1 pomoću (54).