О ИНТЕГРАЦИЈИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ЗАТВОРЕНОМ ОБЛИКУ

И. Бандић, Београд

Дата је линеарна једначина

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (a_\nu = a_\nu(x)) \tag{1}$$

Проблем свођења једначине (1) на једначину нижег реда и, с тим у вези, решавања једначине (1) квадратурама, решаван је само у ограниченом броју случајева.

У последње време ово питање поставља Б. Попов, [1], решавајући линеарну хомогену једначину трећег реда, као и М. Раб, [2], који решава у основи исто питање, с тим што дату једначину третира и квалитативно.

У овом раду је, најпре, изведен један критеријум кад се једначина n—ог реда облика (1) редуцира на једначину реда n—2; изведени резултати се затим примењују на једначину (1) за $n=3$ и $n=4$.

У току рада примењују се релативни изводи М. Петровића, [3].

Релативни извод n—ог реда функције $u(x)$ уводи се дефиницијом

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \quad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}\right)$$

одакле се налазе разни односи међу релативним изводима.

У овом раду су примењени односи

$$\Delta_1(uv) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v); \quad \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_1(u) - \Delta_1(v); \quad \Delta_1(u^n) = n\Delta_1(u);$$

$$\Delta_2(u) = \Delta_1'(u) + \Delta_1^2(u); \quad \Delta_1(exp \int udx) = exp \int \Delta_1(u)\, dx = u.$$

Непосредно из дефиниције следује

$$\Delta_n(u) = \Delta'_{n-1}(u) + \Delta_1(u)\Delta_{n-1}(u); \tag{2}$$

$$\Delta_2(u) - \Delta_2(v) = \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right)\Delta_1\left[uv\,\Delta_1\left(\frac{u}{v}\right)\right]. \tag{3}$$

У раду је, даље, искоришћена теорема о једној рекурентној линеарној хомогеној диференцијалној једначини другог реда, [4], која гласи:

Свакој интеграбилној једначини

$$\Delta_2(\eta) = \Phi, \quad (\Phi = \Phi(x)) \tag{4}$$

одговара интеграбилна једначина истог облика

$$\Delta_2(\eta_k) = \Phi + \lambda_k, \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5}$$

где је

$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[\Delta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{X_\nu}} \right) \right], \quad (X_0 = \Phi), \tag{6}$$

а функције X_ν формирају се по рекурентном обрасцу

$$X_\nu = X_{\nu-1} + \Delta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{X_{\nu-1}}} \right). \tag{7}$$

Општи интеграли једначина (5) везани су релацијом

$$y_k = y \prod_{\nu=0}^{k-1} \left[\frac{\Delta_1(y_\nu)}{\sqrt{X_\nu}} \right], \quad (y_0 = y) \tag{8}$$

(1.2) Једначина (1) се у неким специјалним случајевима своди на једнакост релативних извода истог реда

$$\Delta_n(y) = \Delta_n(\varepsilon), \quad (y = y(x), \ \varepsilon = \varepsilon(x)) \tag{9}$$

која, уствари, претставља линеарну хомогену једначину n—ог реда у односу на непознату функцију $y(x)$.

Овде су од интереса случајеви $n=2$ и $n=3$.

(1.2.1) Једначина (9) за $n=2$ гласи

$$\Delta_2(y) = \Delta_2(\varepsilon), \tag{10}$$

или, на основу (3)

$$\Delta_1\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \Delta_1 \left[y\varepsilon \Delta_1 \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right] = 0$$

Пошто $y \neq k\varepsilon$, ($k=$const.), из последње једначине се добија

$$y\varepsilon \Delta_1 \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) = c_1, \quad (c_1 = \text{const.})$$

а то је линеарна једначина, чије решење је у исто време и општи интеграл једначине (10)

(11) $$y=\varepsilon\left(c_1\int\frac{dx}{\varepsilon^2}+c_2\right),\quad (c_2=\text{const.}).$$

(1.2.2) За $n=3$ из (9) следује линеарна хомогена једначина трећег реда

(12) $$\Delta_3(y)=\Delta_3(\varepsilon),$$

чији је један партикуларни интеграл, очевидно, $y_1=\varepsilon$.

Једначина (12) се супституцијом

(13) $$y=\varepsilon\theta,\quad (\theta=\theta(x))$$

трансформише у једначину трећег реда у односу на непознату функцију $\theta(x)$

$$\Delta_3(\theta)+3\,\Delta_1(\varepsilon)\,\Delta_2(\theta)+3\,\Delta_2(\varepsilon)\,\Delta_1(\theta)=0,$$

која се, даље, сменом

(14) $$\theta'=\eta,\ \text{т. ј.}\ \theta=\int\eta\,dx+c_1,$$

редуцира на линеарну хомогену једначину другог реда

(15) $$\Delta_2(\eta)+3\,\Delta_1(\varepsilon)\,\Delta_1(\eta)+3\,\Delta_2(\varepsilon)=0$$

Увођењем две нове функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ супституцијом

(16) $$\left.\begin{aligned}\eta&=\exp\int\varphi\,\psi\,dx\\ \varepsilon&=\exp\int\varphi\,dx\end{aligned}\right\}$$

једначина (15) се своди на Bernoulli-јеву једначину по непознатој функцији $\varphi(x)$

$$(\psi+3)\,\varphi'+(\psi^2+3\,\psi+3)\,\varphi^2+\psi'\varphi=0$$

чије је решење (партикуларно)

(17) $$\varphi=\left\{(\psi+3)\left[x-3\int\frac{\psi+2}{(\psi+3)^2}\,dx\right]\right\}^{-1}$$

Према томе, ако је

$$\varepsilon=\exp\int\varphi\,dx$$

онда је једно партикуларно решење једначине (15)

$$\eta_1 = \exp \int \varphi\psi \, dx,$$

при чему су функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ везане релацијом (17). Општи интеграл једначине (15) је у том случају

(18) $$\eta = \eta_1 \left(c_2 \int \frac{dx}{\eta_1^2 \, \varepsilon^3} + c_3 \right),$$

а општи интеграл једначине (12), на основу (13), (14) и (15)

(19) $$y = \varepsilon \int \eta_1 \left(c_2 \int \frac{dx}{\eta_1^2 \, \varepsilon^3} + c_3 \right) dx + c_1 .$$

2° Једначина (1) сменом

(20) $$y = pz, \quad (p = p\,(x))$$

трансформише се у једначину

(21) $$z^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \, z^{(n-\nu)} = 0, \quad (b_\nu = b_\nu \,(x))$$

где је

(22) $$b_k = - \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n-\nu}{k-\nu} a_\nu \, \Delta_{k-\nu}(p), \quad (a_0 \equiv 1).$$

Функција $p\,(x)$ одређује се из услова $b_1\,(x) = 0$, или

$$n\,\Delta_1(p) + a_1 = 0,$$

одакле је

(23) $$p = \exp\left(- \frac{1}{n} \int a_1 \, dx \right),$$

па се (20) јавља у облику

(24) $$y = z \exp\left(- \frac{1}{n} \int a_1 \, dx \right)$$

(2.1) Према томе, (1) се сменом (24) трансформише у једначину

(25) $$z^{(n)} - \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu \, z^{(n-\nu)} = 0.$$

Ако се, даље, уведе претпоставка

$$b_k \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots, (n-2) \tag{26}$$

једначина (25) постаје

$$z^{(n)} - b_{n-1}\, z' - b_n\, z = 0, \tag{27}$$

или

$$\Delta_n(z) - b_{n-1}\,\Delta_1(z) - b_n = 0,$$

односно, с обзиром на (2)

$$\Delta'_{n-1}(z) + \Delta_1(z)\,\Delta_{n-1}(z) - b_{n-1}\,\Delta_1(z) - b_n = 0,$$

одакле следује

$$[\Delta_{n-1}(z) - \textstyle\int b_n\, dx]' + \Delta_1(z)\,[\Delta_{n-1}(z) - b_{n-1}] = 0.$$

Ова се једначина, уз претпоставку

$$b_{n-1} = \Delta_{n-1}(\varepsilon), \quad b_n = \Delta'_{n-1}(\varepsilon) \tag{28}$$

где је $\varepsilon(x)$ произвољна функција, редуцира на једначину

$$[\Delta_{n-1}(z) - \Delta_{n-1}(\varepsilon)]' + \Delta_1(z)\,[\Delta_{n-1}(z) - \Delta_{n-1}(\varepsilon)] = 0,$$

или

$$[\Delta_{n-1}(z) - \Delta_{n-1}(\varepsilon)]\;\Delta_1\,[z^{(n-1)} - z\,\Delta_{n-1}(\varepsilon)] = 0,$$

из које се непосредно налази један први интеграл једначине (27)

$$z^{(n-1)} - z\,\Delta_{n-1}(\varepsilon) = c_1, \quad (c_1 = \text{const.}) \tag{29}$$

(2.2) Једначини (29) одговара хомогена једначина

$$\Delta_{n-1}(z) = \Delta_{n-1}(\varepsilon)$$

чије је партикуларно решење, очевидно

$$z_1 = \varepsilon,$$

што значи да се (29) сменом $z = \varepsilon\omega$, $(\omega = \omega(x))$ редуцира на једначину реда $(n-2)$ по непознатој функцији $\omega(x)$.

При наведеним условима коефицијенти једначине (1) налазе се из (22), (26) и (28)

$$
\left.\begin{aligned}
a_k &= \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n-\nu}{k-\nu} a_\nu \Delta_{k-\nu}(p); k=2,3,\cdots,(n-2),\ \Delta_1(p) = -\frac{a_1}{n}, a_0 \equiv 1,\\
a_{n-1} &= \Delta_{n-1}(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{n-2} \binom{n-\nu}{n-\nu-1} a_\nu \Delta_{n-\nu-1}(p)\\
a_n &= \Delta'_{n-1}(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \Delta_{n-\nu}(p).
\end{aligned}\right\} \tag{30}
$$

Према томе, линерна хомогена једначина n—ог реда (1), чији коефицијенти су дати релацијама (30), редуцира се сменом (24) на диференцијалну једначину реда $(n-2)$.

3° У овом параграфу се изведени резултати примењују на једначину облика (1) за $n=4$ и $n=3$.

(3.1) Једначина (1) за $n=4$ гласи

$$
y^{IV} + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0, \quad (a_\nu = a_\nu(x)) \tag{31}
$$

а њени коефицијенти се налазе из (30)

$$
\left.\begin{aligned}
a_2 &= \sum_{\nu=0}^{1} \binom{4-\nu}{2-\nu} a_\nu \Delta_{2-\nu}(p)\\
a_3 &= \Delta_2(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{2} \binom{4-\nu}{3-\nu} a_\nu \Delta_{3-\nu}(p)\\
a_4 &= \Delta'_2(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{3} a_\nu \Delta_{4-\nu}(p).
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Delta_1(p) = -\frac{a_1}{4},\\ &(a_0 \equiv 1)\end{aligned} \tag{32}
$$

Једначина (31), са коефицијентима (32), редуцира се сменом

$$
y = z \exp\left(-\frac{1}{4}\int a_1\, dx\right) \tag{33}
$$

на линеарну једначину трећег реда

$$
z''' - z\Delta_3(\varepsilon) = c_1, \tag{34}
$$

којој одговара хомогена једначина

$$
\Delta_3(z) = \Delta_3(\varepsilon). \tag{35}
$$

Користећи се резултатима из (1. 2. 2), општи интеграл једначине (35) налази се из (19)

(36) $$z = \varepsilon \int \eta_1 \left(c_2 \int \frac{dx}{\varepsilon^3 \eta_1^2} + c_3 \right) dx + c_4,$$

где је, према (16) и (17)

(37) $$\varepsilon = \exp \int \varphi\, dx, \eta_1 = \exp \int \varphi \psi\, dx, \varphi = \left\{ \left(\psi + 3 \right) \left[x - 3 \int \frac{\psi + 2}{(\psi + 3)^2} dx \right] \right\}^{-1}$$

Одатле се, методом варијације констаната, налази општи интеграл једначине (34), $z = z(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$, а из (33) општи интеграл једначине (31).

Пример: Нека је $a_1 = e^{-4kx}$ и $\psi(x) = a$, ($k = \text{const.}$, $a = \text{const.}$). Тада се из (37) налази

$$\varphi = \frac{\alpha}{x}, \quad \varepsilon = x^{\alpha}, \quad \eta_1 = x^{a\alpha}, \quad \alpha = \frac{a + 3}{a^2 + 3a + 3}$$

Коефицијенти интеграбилне једначине (31) су, у том случају, према (32)

(38) $$\left. \begin{aligned} a_1 &= e^{-4kx},\ a_2 = 3k\,(2k + e^{-4kx}),\ a_3 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{x^2} + k^2 (16k + 9e^{-4kx}), \\ a_4 &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(kx - 2)}{x^3} + k^3 (23k + 13e^{-4kx}). \end{aligned} \right\}$$

Општи интеграл хомогене једначине (35) је, на основу (36)

$$z = x^{\alpha} \int x^{a\alpha} \left(c_3 + c_2 \int x^{-\alpha(2a+3)}\, dx \right) dx + c_1,$$

одакле се, наведеном методом, налази општи интеграл нехомогене једначине (34), а из (33), т.ј.

$$y = z \exp \frac{e^{-4kx}}{16}, \quad z = z(x, c_1, c_2, c_3\, c_4)$$

општи интеграл једначине (31), са коефицијентима (38).

(3.2) За $n=3$ једначина (1) постаје

(39) $$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0, \quad (a_\nu = a_\nu(x))$$

где је на основу (30)

$$(40)\qquad \left.\begin{aligned} a_2 &= \Delta_2(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{1} \binom{3-\nu}{2-\nu} a_\nu \Delta_{2-\nu}(p) \\ a_3 &= \Delta_2'(\varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{2} a_\nu \Delta_{3-\nu}(p) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Delta_1(p) = -\frac{a_1}{3} \\ &(a_0 \equiv 1) \end{aligned}$$

Уз ове услове (39) се сменом

$$(41)\qquad y = z \exp\left(-\frac{1}{3}\int a_1 dx\right)$$

трансформише у линеарну диференцијалну једначину другог реда

$$(42)\qquad z'' - z\Delta_2(\varepsilon) = c_1, \ (c_1 = \text{const.}),$$

којој одговара хомогена једначина

$$(43)\qquad \Delta_2(z) = \Delta_2(\varepsilon)$$

Општи интеграл ове једначине је, према (11)

$$z = \varepsilon\left(c_2 \int \frac{dx}{\varepsilon^2} + c_3\right),$$

одакле се налази и општи интеграл једначине (42)

$$(44)\qquad z = \varepsilon\left\{c_1 + c_2 \int \frac{dx}{\varepsilon^2} + c_3\left[\int \varepsilon dx. \int \frac{dx}{\varepsilon^2} - \int\left(\varepsilon \int \frac{dx}{\varepsilon^2}\right) dx\right]\right\},$$

а општи интеграл једначине (39), са коефицијентима (40), добије се кад се z из (44) смени у једнакост (41).

Служећи се једном другом методом, у основи до истог резултата долази и Б. Попов, [1], но с ограничењем $\Delta_1(\varepsilon) = -a_1$.

(3.2.1) Полазећи од интеграбилне једначине (43) следује, на основу теореме из (1.1), да је интеграбилна и свака једначина

$$(45)\qquad \Delta_2(z_k) = \Delta_2(\varepsilon) + \lambda_k, \ (k = 1, 2, 3, \dots)$$

где је

$$(46)\qquad \lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{X_\nu}}\right)\right], \quad (X_0 = \Delta_2(\varepsilon))$$

при чему се функције X_ν, формирају по рекурентном обрасцу

$$X_\nu = X_{\nu-1} + \Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{X_{\nu-1}}}\right) \tag{47}$$

и општи интеграли дати су релацијама

$$z_k = z\prod_{\nu=0}^{k-1}\left[\frac{\Delta_1(z_\nu)}{\sqrt{X_\nu}}\right], \quad (z_0 = z) \tag{48}$$

Једнакости (40) сада се јављају у облику

$$\left.\begin{aligned} a_{2,k} &= \Delta_2(\varepsilon) + \lambda_k + \sum_{\nu=0}^{1}\binom{3-\nu}{2-\nu}a_\nu\Delta_{2-\nu}(p) \\ a_{3,k} &= [\Delta_2(\varepsilon) + \lambda_k]' + \sum_{\nu=0}^{2} a_\nu\Delta_{3-\nu}(p) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Delta_1(p) = -\frac{a_1}{3}; \\ &(a_0 \equiv 1) \end{aligned} \tag{49}$$

(3.2.2) Према томе, линеарне хомогене једначине

$$y_k''' + a_1 y_k'' + a_{2,k} y_k' + a_{3,k} y_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{50}$$

решавају се квадратурама ако њихови коефицијенти задовољавају услове (49), (46) и (47). Општи интеграли једначина (50) су

$$y_k = z_k \exp\left(-\frac{1}{3}\int a_1\,dx\right), \tag{51}$$

где су функције z_k дате релацијама (48), а почетни интеграл, $z = z_0$, одређен је једнакошћу (44).

Пример Нека је $\varepsilon = e^{x^2/2}$, $a_1 = e^{-3x}$. Тада се из (49), (46) и (47) налази за $k = 1$

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= 4 + x^2 + \frac{2x^2 - 1}{(1+x^2)^2} + 2e^{-3x}, \\ a_{3,1} &= 2x\left(1 + \frac{2(2-x^2)}{(1+x^2)^3}\right) + 4 + 3e^{-3x}. \end{aligned} \tag{52}$$

Општи интеграл једначине (50), са коефицијентима (52), је на основу (51)

$$y_1 = z_1 \exp\frac{e^{-3x}}{9},$$

где је, према (48)

$$z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1+x^2}},$$

при чему је, с обзиром на (44)

$$z = e^{x^2/2}\left\{c_1 + c_2 \int e^{-x^2}dx + c_3\left[\int e^{x^2/2}dx \int e^{-x^2}dx - \int\left(e^{x^2/2}\int e^{-x^2}dx\right)dx\right]\right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *B. S. Popov*, Über die Integration der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung in geschlossener Form, Билтен на друштвото на математичарите и физичарите од Народна Република Македонија, кн. VII, 1956, стр. 17—19, Скопје.

[2] *Rab Miloš*, Oscilační vlastnosti integralu diferencialni linearni rovnice 3. radu, Prace Brnenske zaklad Československé akad. ved., 1955, 27, 7, 349—360.

[3] *М. Петровић*, Један диференцијални алгоритам и његове примене, Посебна издања, САН, кн. CXI, Београд, 1936.

[4] *I. Bandić*, On a Recurrent Linear Differential Equation of the Second Order, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija II, T. 12, Zagreb, 1957, 3.

Zusammenfassung

ÜBER DIE INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN GESCHLOSSENER FORM

I. Bandić, Beograd

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Reduktion der Gleichung (1) auf eine Gleichung niedrigeren Grades und, im Zusammenhang damit, das Problem der Auflösung dieser Gleichung durch Quadraturen bearbeitet.

In § 1 sind die Materialien dargelegt, welche auf die Lösung der gestellten Frage angewandt werden. Hier werden, zunächst, die Grundverhältnisse zwischen den relativen Ableitungen (3) auseinandergesetzt; im Punkt (1.1) wird ein Lehrsatz über die rekurrente Lineargleichung zweiten Grades dargelegt und im Punkt (1.2) ist die Möglichkeit der Auflösung einer Lineargleichung in der Form (9) für $n=2$ und $n=3$ untersucht worden.

Das Grundproblem wird im § 2 gelöst. Dort wird (1) durch die Substitution (24) in die Gleichung (25) verwandelt, welche unter der Voraussetzung (26) auf (27) zurückgeführt wird. Diese Gleichung wird, durch Einführung der Bedingung (28) auf (29) reduziert, woraus man unmittelbar zur Gleichung des n—2 Grades kommt. Schliesslich werden, aus (22), (26) und (28) die Koeffizienten (30) der Gleichung (1) bestimmt, wenn man diese auf eine Gleichung des n—2 Grades zurückführt.

Im § 3 wird die Anwendung der Resultate aus dem § 2 auf die Gleichung in der Form (1) gegeben, für $n=4$ und $n=3$. Zugleich beweist man, dass unter den obenangeführten Bedingungen diese Gleichungen durch Quadraturen abgelöst werden.

So findet man im Punkt (3.1), dass die Gleichung des vierten Grades (31), unter den Bedingungen (32), durch Quadratuaufgelöst werden, und im Punkt (3.2), dass die Glechiung des dritten Grades (30), unter den Bedingungen (40) integrabel ist; im Punkt (3.2.1) wird der Kreis intergrabler Gleichungen (39), durch die Anwendung des Lehrsatzes aus dem Punkt (1.1) beliebig erwietert.