O JEDNOJ FORMULI KOJA JE ANALOGNA FORMULI ZA RAZLAGANJE RACIONALNE FUNKCIJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE

D. Đoković

1. *U Zborniku matematičkih problema* (I deo, Beograd, 1957) od prof. *D. S. Mitrinovića* na str. 180 nalazi se problem:

Dokazati identitet

$$\sin^{n-1} x \,/ \prod_{\nu=1}^{n} \sin (x - a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu / \sin (x - a_\nu), \tag{1}$$

gde je

$$A_\nu = \sin^{n-1} a_\nu \,/ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \sin (a_\nu - a_i) \quad (x \neq a_\nu + k\pi;\ a_\nu - a_i \neq k\pi \text{ za } \nu \neq i).$$

U ovoj beleški daćemo jedan dokaz identiteta (1) pomoću metoda matematičke indukcije.

2. *Dokaz.* Formula (1) je tačna za $n = 2$. Da bismo ovo pokazali, pođimo od relacije

$$\frac{\sin x}{\sin (x - a_1)\ \sin (x - a_2)} \equiv \frac{A}{\sin (x - a_1)} + \frac{B}{\sin (x - a_2)}.$$

$$\therefore \quad \sin x = A \sin (x - a_2) + B \sin (x - a_1)$$

$$= (A \cos a_2 + B \cos a_1) \sin x - (A \sin a_2 + B \sin a_1) \cos x.$$

$$\therefore \quad A \cos a_2 + B \cos a_1 = 1;\ A \sin a_2 + B \sin a_1 = 0.$$

$$\therefore \quad A = \sin a_1 / \sin (a_1 - a_2),\ B = \sin a_2 / \sin (a_2 - a_1).$$

Pretpostavimo sada da je razlaganje (1) mogućno za $n=k$, odnosno da je

$$(2) \qquad \sin^{k-1} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k} \sin (x - a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu / \sin (x - a_\nu).$$

Posle množenja sa $\sin x / \sin (x - a_{k+1})$, iz (2) se dobija

$$\sin^{k} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin (x - a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \sin x / [\sin (x - a_\nu) \sin (x - a_{k+1})].$$

No svaki sabirak na desnoj strani možemo napisati kao zbir dva sabirka oblika: $A_\nu' / \sin (x - a_\nu) + A_{k+1}^\nu / \sin (x - a_{k+1})$. Učinimo li to, dobijamo:

$$\sin^{k} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin (x - a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu' / \sin (x - a_\nu) + \left(\sum_{\nu=1}^{k} A_{k+1}^\nu \right) / \sin (x - a_{k+1}).$$

Stavimo li $A_{k+1}' = \sum_{\nu=1}^{k} A_{k+1}^\nu$, imaćemo

$$\sin^{k} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin (x - a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{k+1} A_\nu' / \sin (x - a_\nu).$$

Na taj način smo dokazali da za proizvoljno n postoji relacija (1). Ostaje još da se izračunaju koeficijenti A_ν.

Kako je

$$\frac{\sin^{n-1} x}{\left[\prod_{\nu=1}^{n} \sin (x - a_\nu) \right] \left[\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu / \sin (x - a_\nu) \right]} \equiv 1,$$

biće

$$\lim_{x \to a_k} \frac{\sin^{n-1} x}{\left[\prod_{\nu=1}^{n} \sin (x - a_\nu) \right] \left[\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu / \sin (x - a_\nu) \right]} = 1.$$

Granična vrednost koja se javlja na levoj strani poslednje relacije iznosi

$$\frac{\sin^{n-1} a_k}{A_k \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} \sin (a_k - a_\nu)},$$

pa je stoga

$$A_k = \frac{\sin^{n-1} a_k}{\prod\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} \sin(a_k - a_\nu)}.$$

3. Prof. *D. S. Mitrinović*, prof. *Đ. Kurepa* i docent *M. Popadić* pročitali su ovu belešku u rukopisu. Prof. *Mitrinović* učinio je sledeću primedbu:

„*N. A. Kolmogorov*, rešavajući jedan geometriski problem[1]), takođe je izveo formulu (1). Algebarski dokaz koji je napred naveden ima preimućstvo nad geometriskim dokazom Kolmogorova, jer je kraći i može se lakše uneti u literaturu”.

Katedra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Résumé

SUR UNE FORMULE ANALOGUE À CELLE DE DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN ÉLÉMENTS SIMPLES

D. Đoković

On démontre la formule (1) par l'induction complète.

N. A. Kolmogoroff a démontré la même formule aux moyens des considérations géométriques[1]).

1) 1° *Н. А. Колмогоров*: *Свойства систем точек, лежащих на прямой линии, на окружности и на равносторонней гиперболе* (*Ученые записки*, Факультет физико-математический, Кировский государствнный педагогический институт им *В. И. Ленина*, вып. 7, 1953, стр. 15—28).

2° *Mathematical Reviews*, vol. 17, 1956, p. 997 (referat *N. Court*-a o navedenom članku Kolmogorova).