FORMULA ZA IZRAČUNAVANJE ZBIRA SLIČNIH POTENCIJA PRIRODNIH BROJEVA

D. Đoković

1. *Bernoulli*-evi brojevi b_ν ($\nu=0, 1, 2, \ldots$) definisani su relacijom

$$\frac{e^x-1}{x}\equiv\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Bernoulli-eva sumaciona formula za zbir

$$S_k(n-1)\equiv 1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k$$

ima oblik

$$S_k(n-1)\equiv\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu\binom{k+1}{\nu} n^{k+1-\nu}.$$

Na osnovu ovog dobija se

$$(1)\qquad S_k(n)\equiv S_k(n-1)+n^k\equiv\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} B_\nu\binom{k+1}{\nu} n^{k+1-\nu},$$

gde je

$$B_\nu=b_\nu\ (\nu=0, 2, 3, \ldots),\quad B_1=-b_1\ (=1/2).$$

Iz formule (1) sleduje

$$(k+1)\int_0^n S_k(t)\,dt\equiv\sum_{\nu=0}^{k}\left\{B_\nu\binom{k+1}{\nu}\int_0^n t^{k+1-\nu}\,dt\right\}$$

$$\equiv\frac{1}{k+2}\sum_{\nu=0}^{k}(k+2)\binom{k+1}{\nu}B_\nu\frac{n^{k+2-\nu}}{k+2-\nu}$$

$$\equiv\frac{1}{k+2}\sum_{\nu=0}^{k}B_\nu\binom{k+2}{\nu}n^{k+2-\nu}$$

$$\equiv \frac{1}{k+2} \left\{ \sum_{\nu=0}^{k+1} B_\nu \binom{k+2}{\nu} n^{k+2-\nu} - \binom{k+2}{k+1} B_{k+1} n \right\}$$

$$\equiv S_{k+1}(n) - B_{k+1} n.$$

Odavde sleduje

$$S_{k+1}(n) \equiv (k+1) \int_0^n S_k(t)\, dt + B_{k+1} n \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ako uvedemo brojeve b_ν, dobijamo

$$S_{k+1}(n) \equiv (k+1) \int_0^n S_k(t)\, dt + b_{k+1} n \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Formula (2) može poslužiti za izračunavanje zbira $S_{k+1}(n)$, ako znamo zbir $S_k(n)$ i *Bernoulli-ev* broj b_{k+1}.

2. *S. Prešić* nam je saopštio da je izveo formulu

$$S_{k+1}(n) \equiv (k+1) \int_0^n S_k(t)\, dt + C_{k+1} n, \tag{3}$$

gde je

$$C_{k+1} = 1 - (k+1) \int_0^1 S_k(t)\, dt. \tag{4}$$

Ako uporedimo formule (2) i (3), dobijamo

$$b_{k+1} = 1 - (k+1) \int_0^1 S_k(t)\, dt. \tag{5}$$

Poslednja formula može se primeniti za izračunavanje *Bernoulli*-evih brojeva.

Katedra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Résumé

FORMULE POUR LE CALCUL DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS

D. Đoković

On indique la formule (2), où b_{k+1} désigne le nombre de *Bernoulli* et

$$S_k(n) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k.$$

En comparant la formule (2) avec la formule (3), indiquée par *S. Prešić*, on obtient la formule (5), qui peut être appliquée pour le calcul des nombres de *Bernoulli*.