PRI AVANTAĜOJ DE GIBBS-AJ SUPER GAUSS-AJ ESPRIMOJ POR LA TRIAGULRILATOJ EN PLANEDETORBITOJ

(Bož. Popović, Sarajevo)

Kiam en astronomia literaturo el orbitteorio oni parolas pri la metodo de *Gibbs* [1], oni kutime asertas ke la *Gibbs*-aj esprimoj por triangulrilato ĝustas ĝis la kvara grado de tempintervaloj inkluzive, t.e. du gradojn pli ol ĉe la samspecaj *Gauss*-aj esprimoj. Sed la aserto ne estas bona — la diferenco estas nur en unu grado de tempintervaloj. La artikolo celas pli detale pritrakti avantaĝojn de ambaŭ specaj esprimoj.

1

Gibbs ekiras (v. ekz. [2], p. 417) de seriigo de pozicivektoro de planedeto laŭ la gradoj de tempintervaloj τ, stariĝante ĉe la kvara grado, t.e. de

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + \tau\mathbf{B} + \tau^2\mathbf{C} + \tau^3 D + \tau^4\mathbf{E}, \tag{1}$$

ĉe utiligante ankaŭ la kondiĉon

$$-\mathbf{r}/r^3 = \ddot{\mathbf{r}} = 2\,\mathbf{C} + 6\tau\mathbf{D} + 12\,\tau^2\,\mathbf{E}.$$

Por eltrovi la Gibbs-esprimojn, oni utiligas ĉi tiujn ekvaciojn por tempintervaloj $-\tau_3$, 0, τ_1 (por kiuj $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$) kaj oni eliminas $\mathbf{B}$ el la unua kaj la tria ekvacioj, krome oni utiligas $\mathbf{A} = \mathbf{r}_2$, $2\mathbf{C} = -\mathbf{r}_2/r_2^3$ el la dua kaj la kvina ekvacioj. Kun la signaĵo $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$ la resto de la sistemo fariĝas.

$$\tau_1\mathbf{r}_1 + \tau_3\mathbf{r}_3 - \tau_2\mathbf{r}_2\left(1 - \frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3}\right) = \tau_1\tau_3(\tau_1^2 - \tau_3^2)\,\mathbf{D} + \tau_1\tau_3(\tau_1^3 + \tau_3^3)\,\mathbf{E}$$

$$-\mathbf{r}_1/(12\,r_1^3) + \mathbf{r}_2/(12\,r_2^3) = -\frac{1}{2}\tau_3\,\mathbf{D} + \tau_3^2\,\mathbf{E}$$

$$-\mathbf{r}_3/(12\,r_3^3) + \mathbf{r}_2/(12\,r_2^3) = \frac{1}{2}\tau_1\,\mathbf{D} + \tau_1^2\,\mathbf{E}.$$

Ĉi tiun ekvaci-sistemon oni kontentigos per nuligo de la determinento, t.e. (dividite per $-\tau_1\tau_3$) kiam oni havos

$$\left[\tau_1\mathbf{r}_1+\tau_3\mathbf{r}_3-\tau_2\mathbf{r}_2\left(1-\frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3}\right)\right](\tau_1+\tau_3)+$$

$$+\left(\frac{\mathbf{r}_1}{12r_1^3}-\frac{\mathbf{r}_2}{12r_2^3}\right)\left[-2\tau_1^2(\tau_1^2-\tau_3^2)+\tau_1(\tau_1^3+\tau_3^3)\right]+$$

$$+\left(\frac{\mathbf{r}_3}{12r_3^3}-\frac{\mathbf{r}_2}{12r_3^2}\right)\left[2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)+\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)\right]=0.$$

De ĉi tio tuj, kun divido per $\tau_1+\tau_3=\tau_2$, ni trovas

$$\tau_1\mathbf{r}_1\left(1-\frac{\tau_1^3-2\tau_1\tau_3^2-\tau_3^3}{12\tau_2r_1^3}\right)+\tau_3\mathbf{r}_3\left(1-\frac{\tau_3^3-2\tau_3\tau_1^2-\tau_1^3}{12\tau_2r_3^3}\right)-$$

$$-\tau_2\mathbf{r}_2\left(1-\frac{6\tau_1\tau_2\tau_3+\tau_1(\tau_1^2-\tau_1\tau_3-\tau_3^2)-\tau_3(\tau_1\tau_3-\tau_3^2+\tau_1^2)}{12\tau_2r_2^3}\right)=0.$$

La koeficientoj apud $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, estas Gibbs-esprimoj

$$(2)\qquad \tau_1\left(1-\frac{\tau_1^2-\tau_2\tau_3}{12r_1^3}\right),\ \tau_3\left(1-\frac{\tau_3^2-\tau_1\tau_2}{12r_3^3}\right),\ \tau_2\left(1-\frac{\tau_2^2+\tau_1\tau_3}{12r_2^3}\right).$$

Ili proksimume proporcias al grandoj de vektoraj produtoj $[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]$, $[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]$, $[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3]$kaj pro (1) ili ĝustas inkluzive ĝis la kvara grado de tempintervaloj (En tiu senco oni povas paroli pri ĝusteco de Gibbs-triangulrilatoj ĝis la kvara grado, sed tiam la respektivaj Gauss-rilatoj — kiel ni vidos iom poste — ĝustas ĝis la tria grado). La esprimoj en la parentezoj, sekve ankaŭ iliaj kvocientoj, ĝustas nur ĝis la tria grado. Kaj ĵus la kvocientoj, multiplikataj per mezgrandaj kvantoj $\frac{\tau_1}{\tau_2}$, $\frac{\tau_3}{\tau_2}$, anstataŭas la triangulrilatojn, t.e. n_1 kaj n_3 en

$$\mathbf{r}_2=n_1\mathbf{r}_1+n_3\mathbf{r}_3.$$

2

La komparon kun la Gauss-esprimoj oni ne povas fari eltrovante ilin per la sama procedo, ĉar ilia eltrovo iras per du tute diversaj vojoj, sed oni povas kompari la trovitajn ekvaciojn, skribitaj en sama formo.

Kiam oni skribas la respektivajn Gauss-esprimojn en formo de la sama ekvacio

$$(3)\qquad \tau_1 \mathbf{r}_1\left(1-\frac{\tau_1^2}{6r_2^3}\right)+\tau_3 \mathbf{r}_3\left(1-\frac{\tau_3^2}{6r_2^3}\right)-\tau_2 \mathbf{r}_2\left(1-\frac{\tau_2^2}{6r_2^3}\right)=0.$$

oni vidas ke ankaŭ ĉi tie la koeficientoj havas triagradajn membrojn de tempintervaloj (kaj oni scias ke ĉiuj ili estas ĉi tie kaptitaj, sed ne la kvaraj gradoj); tiam n_1 kaj n_3 ĝustas ĝis la dua grado de tempintervaloj.

La esenca diferenco kuŝas en la fakto ke en la Gauss-esprimoj oni uzas egalajn grandojn $r_1 = r_2 = r_3$ kaj en Gibbs-esprimoj ili diversas. Kaj ĵus tiu plia grado (esplice nevidebla en Gibbs-esprimoj, kaj tamen ili atingas unu gradon pli) troviĝas en $r_1 \neq r_2$, $r_3 \neq r_2$. Vere se oni provas uzi r_2 anstataŭ r_1 en la unua esprimo (2), oni devos multipliki la kvocienton per $(r_2/r_1)^3\left(1-\frac{r_1-r_2}{r_1}\right)^3 \approx 1-\frac{3}{r_1}r'_2\,\tau_3$, do aperos esprimoj kun unu plia grado.

Do per uzo de egalaj gradoj en Gibbs-esprimoj la ĝusteco reduktiĝas al nur du gradoj (kvankam per tio ili ne reduktiĝas al Gauss-esprimoj, ĉar ili enhavas iom de tria grado de tempintervaloj). Ĉi tio montras ke oni ne povas trovi la esprimojn en la formo (3) kies ĝusteco pligrandiĝus je unu grado kaj ke ĉie restu r_2 — la pliĝustecon oni povas atingi nur per enkonduko de unu plia grado en (3), kiam nepre aperas ankaŭ r'_2, respektive per enkonduko de r_1 kaj r_3 ĉe Gibbs.

En okazo de egalaj tempintervaloj kaj tiuj kaj aliaj esprimoj akiras unu plian gradon en ĝusteco. Por Gibbs-esprimoj oni tion vidas plej facile se en (1) oni iras dekstre ĝis la kvina grado (kaj oni prenas $\tau_3 = \tau_1$). Tiam samtempe estas eliminataj la membroj kun unua, tria kaj kvina grado kaj restas la ekvacioj

$$\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3=2\mathbf{r}_2-\tau_1^2\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}+2\tau_1^4\mathbf{E}$$

$$-\mathbf{r}_1/(r_1^3)-\mathbf{r}_3/(r_3^3)=-2\mathbf{r}_2/(r_2^3)+24\,\tau_1^2\,\mathbf{E},$$

respektive

$$\mathbf{r}_1\left(1+\frac{\tau_1^2}{12r_1^3}\right)+\mathbf{r}_3\left(1+\frac{\tau_1^2}{12r_3^3}\right)=2\,\mathbf{r}_2\left(1-\frac{5\tau_1^2}{12r_2^3}\right).$$

La samon oni trovas uzante $\tau_3 = \tau_1$, $\tau_2 = 2\tau_1$ en la esprimoj (2), kio montras ke en Gibbs-esprimoj por egalaj tempintervaloj estas konsiderita unu plia grado de τ.

3

Al ĉi tiu rezonado oni povas prave rimarki ke ĝi ne estas sufiĉe rigora, ke eble per seriigo oni eltrovus iom aliajn rezultatojn, respektive ke finfine ne esencas la ĝusteco de la triangulrilatoj, sed kian efikon havas ĉi tia ĝusteco al la eltrovado de tercentraj distancoj.

La seriigo montras (ekz. [4], p. 197) ke la serioj por Gibbs-aj triangulrilatoj kongruas kun la veraj serioj nur inkluzive la triajn gradojn de tempintervaloj kaj ke ĉe la kvaraj gradoj aperas gravaj diferencoj (malaperantaj nur en okazo de egalaj intervaloj, kio konkordas kun la antaŭdirita por tia okazo). Do la seriigo donas nenion alian. Restas ankoraŭ la esenca afero: kiel la esprimoj influas eltrovadon de tercentraj distancoj?

La vera lokocentra distanco ρ_2 de la meza observo estas donata per la esprimo

$$D\rho_2 = D_1 n_1 + D_3 n_3 - D_2, \quad D = (\mathbf{E}_1\,\mathbf{E}_2\,\mathbf{E}_3), \quad D_l = (\mathbf{R}_l\,\mathbf{E}_1\,\mathbf{E}_3); \tag{4}$$

ĉe kio $\mathbf{E}_l$ estas la lokocentraj unuovektoroj de la planedobservoj kaj $\mathbf{R}_l$ la lokocentraj pozicioj de la suno. Se ĉi tie oni utiligas por n_1 kaj n_3 la Gibbs-esprimojn, eraraj je Δn_1, Δn_3, oni havos

$$\begin{aligned} D.\,\Delta\rho_2 &= D_1\,\Delta n_1 + D_3\,\Delta n_3 = D_2\,(\Delta n_1 + \Delta n_3) + \\ &+ (\tau_1\,\Delta n_3 - \tau_3\,\Delta n_1)\,D', \quad D' = (\dot{\mathbf{R}}_2\,\mathbf{E}_1\,\mathbf{E}_3) \end{aligned} \tag{5}$$

Kiam en la esprimoj (2), respektive en la kvocientoj

$$\frac{\tau_1(1 - A_1 r_1^{-3})}{\tau_2(1 - A_2 r_2^{-3})}, \quad \frac{\tau_3(1 - A_3 r_3^{-3})}{\tau_2(1 - A_2 r_2^{-3})},$$

ni seriigos r_1^{-3} kaj r_2^{-3} ĝis la duaj gradoj de tempintervaloj inkluzive, kaj kiam ni poste multiplikos la numeratorojn per $1 + A_2 r_2^{-3} + A_2^2 r_2^{-6}$ kaj se ni fine forigos la membrojn kongruantaj kun la konataj serioj por n_1 kaj n_3, tiam en $\Delta n_1 + \Delta n_3$ forfalos ĉiuj kvargradaj membroj. La samo okazos ankaŭ ĉe $\tau_1\,\Delta n_3 - \tau_3\,\Delta n_1$, tiel ke dekstraflanke restas nur la sesgradaj membroj (ĉar D_2 kaj D' estas de la unua grado en tempintervaloj). Estas bone konate ke D estas triagrada kvanto laŭ la intervaloj, el kio sekvas ke kun la Gibbs-esprimoj oni havas

$$\Delta\rho_2 = 0\,(\tau_3).$$

La samon oni havas por $\Delta\rho_1$ kaj $\Delta\rho_3$.

La unua solvo kun Gauss-esprimoj donas nur $\Delta\rho = 0\,(\tau)$. Do en la fina rezultato la Gibbs-esprimoj estas tamen por du gradoj „pli fortaj" ol la Gaussesprimoj (kiel oni trovas ankaŭ en [4]).

4

La lasta konkludo estas tamen favora por la Gibbs-esprimoj, ĉar kvankam ili mem estas pli ĝustaj ol la Gauss-esprimoj nur por unu grado la fina rezultato estas pli ĝusta por du gradoj. Sed aliflanke, por atingi la finan rezultaton en kalkulado kun Gibbs-esprimoj, oni devas unue ekiri de $r_1 = r_2 = r_3$, ĉar oni ne konas ilian diferencon. La unuaj paŝoj entenas ne nur la erarojn pro Δn_1 kaj Δn_3, sed ankaŭ la erarojn pro $r_1 = r_2 = r_3$. Esploru detale la lastan eraron.

La ekvacio (5) valoras ankaŭ ĉi tie, nur la ŝanĝoj Δ devenas de eraraj r_1 kaj r_3. La unua neglektita membro ĉe r_1 estas $-\tau_3 r'_2$ kaj ĉe r_3 ĝi estas $\tau_1 r'_2$, do pro anstataŭigo de r_1^{-3}per r_2^{-3} oni havas

$$\tau_2 (1 - A_2 r_2^{-3}) \Delta n_1 = -3 A_1 \tau_1 r_2^{-4} \cdot \tau_3 r'_2 = -3 A_1 \tau_1 \tau_3 r_2^{-3} \eta,$$

kie $\eta = (rr') : r^2$ estas enkondukita en [3]. Same oni havas por Δn_3, entute

$$\Delta (n_1 + n_3) = \frac{3 \tau_1 \tau_3 r_2^{-3} \eta (A_3 - A_1)}{\tau_2 (1 - A_2 r_2^{-3})} =$$

$$= \frac{3}{12} \tau_1 \tau_3 r_2^{-3} \eta \cdot \frac{2 \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)}{\tau_2 (1 - A_2 r_2^{-3})} = (O \tau^3 \eta).$$

Tute same oni montras ke $\Delta (\tau_1 n_3 - \tau_3 n_1) = O (\tau^4 \eta)$. Sed ĉar D_2 kaj $D' = O (\tau)$, $D = O (\tau^3)$, oni trovas $\Delta \rho_2 = O (\tau\eta)$ se oni uzas $r_1 = r_2 = r_3$ en Gibbs-esprimoj. Kune kun la eraroj pro neglektitaj superaj gradoj en n_1 kaj n_3 oni trovas entute

$$\Delta \rho_2 = O (\tau^3) + O (\tau \eta). \tag{6}$$

Oni scias ke kun Gauss-esprimoj $\Delta \rho_2 = O (\tau)$, sed fakte ankaŭ tie estas $O (\tau\eta)$, ĉar la unua neglektita membro, krom tria grado de tempinintervaloj, enhavas ankaŭ r', kio signifas ankaŭ η.

Pro $O (\tau\eta)$ en (6), la unua paŝo kun Gibbs-esprimoj ne donas pli ol Gauss-esprimoj. Nur la postaj paŝoj, kiam oni eltrovas r_1 kaj r_3, povas signifigi la unuan membron en (6). Nome kun $\Delta \rho_i = O (\tau\eta)$ oni ŝajne denove atingas la saman precizecon $O (\tau\eta)$, sed la trovita esprimo por $\Delta (n_1 + n_3)$ enhavas ankaŭ $\tau_3 - \tau_1$, kiu estas negranda (aŭ unu el aliaj du intervaloj estas negranda), krome D_2 en (5) estas malgranda, kaj la sekvo estas ke ĉiu nova paŝo rapide malpligrandigas la duan membron en (6) kompare kun la unua kaj oni atingas la finan rezultaton $\Delta \rho = O (\tau^3)$.

Komparante la erarojn devenantaj pro neglektitaj membroj en la Gibbs-esprimoj kaj pro $r_1 = r_2 = r_3$ (la lasta preskaŭ la sama kiel kun la Gauss-esprimoj) oni vidas ke ĉe longaj tempintervaloj la unuaj eraroj preskaŭ egaliĝas kun la duaj en okazoj de: malgranda η (negranda ekscentriĝo aŭ preskaŭ periheliaj observoj), malgranda D_2 (negranda inklino al la ekliptiko) kaj malgranda $\tau_3 - \tau_1$ (preskaŭ egaldistancaj observoj). En tiuj okazoj la Gibbs-esprimoj donas nemulte pli ol la

Gauss-esprimoj — la dua membro en (6) reduktiĝas al la duaj gradoj de tempintervaloj.

5

Post la trovitaj rezultatoj stariĝas la demando: ĉu utilas kompliki la kalkulojn per Gibbs-esprimoj kiam ili en multaj okazoj ne donas multe pli ol la Gauss-esprimoj?

En okazoj de malgrandaj tempointervaloj certe pli utilas Gibbs-esprimoj, sed en tiu okazo la metodoj de Laplace-tipo pli konvenas ol la metodoj de Gauss-tipo.

En okazoj de pli grandaj intervaloj se $D_2 = (\mathbf{R}_2 F\, F_3)$ kaj aliaj similaj esprimoj estas malgrandaj, aŭ se la observoj estas preskaŭ egaldistancaj, tiam la Gauss-esprimoj estas iom pli konvenaj, ĉar kun multe pli malgranda laboro ili tiam donas sufiĉe bonajn rezultatojn. En aliaj okazoj oni ne povas antaŭvidi ĉu la ekscentrigo estas granda au ne kaj ĉu la observoj estas preskaŭ periheliaj. Kiel ni vidis, ankaŭ tiam la Gibbs-esprimoj ne donas multe pli ol la Gauss-esprimoj (krome en [3] estas montrita ke grandeco de la neglektitaj membroj dependas multe pli de $\zeta = r\dot{r}^2 - 1$ ol de la tempintervaloj). Pro tio *verŝajne ankaŭ tiam ne utilos kompliki la kalkulojn per Gibbs-esprimoj*, ĉar oni povas esperi ke la cirkonstancoj tamen estos sufiĉe favoraj por Gauss-esprimoj (kaj se oni postulas la precizecon, oni povas kaj devas ĉiuokaze utiligi la plibonigprocedon per rilatoj de trianguloj al la koncernaj sektoroj).

Ĉi tio aspektas tute alie *se oni* ne uzas simplajn kalkulilojn sed oni *utiligas elektronkalkulilojn*. Tiam longeco de kalkuloj signifasnenion kaj *utilas en ĉiuj okazoj tuj labori kun Gibbs-esprimoj*, kiuj tamendonos (multe au nemulte) pli precizan la unuan solvon. Principe se la tempintervaloj ne estas tre grandaj oni povas per Gibbs-esprimoj tuteeviti la postan plibonigprocedon kaj tuj post la unua solvo transiri al la definitiva orbito el pluraj observoj.

LA MENCIITA LITERATURO:

[1] GIBBS J. W.: „On the Determination of elliptic orbits from three complete observations", Mem. Nat. Acad. of Sciences, t. IV, pt. 2, p. 118, Washington 1888.

[2] KLINKERFUESS W.: „Theoretische Astronomie", III Auflage, Braunschweig 1912.

[3] POPOVIĆ B.: „Nove formule i tablice za f i g kod izračunavanja heliocentričnih položaja malih planeta", RASPRAVE Jug. Akad. znanosti i umjetnosti, Zagreb, Sv. I, № 7, 1956.

[4] SUBBOTIN M. F.: „Kurs nebesnoj mehaniki", I, 2 izdanje, Moskva—Lenjingrad, 1941.

O PREDNOSTIMA GIBBS-OVIH NAD GAUSS-OVIM IZRAZIMA ZA ODNOSE TROUGLOVA U PUTANJAMA MALIH PLANETA

(Bož. Popović. Sarajevo)

Autor dokazuje da su Gibbs-ovi izrazi ([1] i napr. [2] str. 417) za odnose trouglova tačni samo do trećeg stepena zaključno, dakle samo za jedan stepen više od Gauss-ovih izraza. Najpre je dato kratko izvodjenje ovih izraza. Kako se polazi od (1) to su (2) tačni do četvrtog stepena zaključno, a njihovi količnici n_1 i n_3 samo do trećeg stepena. Upoerđenjem sa (3), čiji količnici daju Gauss-ove izraze, dolazi se do konačnog pomenutog zaključka. Bitna razlika je baš u tome što Gibbs-ovi izrazi upotrebljavaju $r_1 \neq r_2 \neq r_3$. Kad bi se i u njima uzelo $r_1 = r_2 = r_3$ javio bi se odmah treći stepen vremenskih intervala.

Za jednake intervale može se u (1) uzeti i peti stepen, koji pri eliminaciji otpada a dobiju se izrazi identični sa (2), uz $\tau_3 = \tau_1$. Jedino tada su Gibbs-ovi izrazi tačni stvarno do četvrtog stepena.

U trećem delu autor ukazuje da se i iz rigoroznih razvijanja [4] (str. 197) vidi da Gibbs-ovi n_1 i n_3 otstupaju od pravih vrednosti u četvrtom stepenu vremenskih intervala. Ali s druge strane bitno je kakav je efekat ovih izraza pri izračunavanju topocentričnih daljina. Kad u (4) umesto pravih uzmemo pogrešne n imaćemo (5), pa dalje ispitivanje pokazuje da $\Delta n_1 + \Delta n_3$, kao i $\tau_1 \Delta n_3 - \tau_3 \Delta n_1$ imaju grešku samo petog stepena, te se dolazi do $\Delta \rho_2 = O(\tau^3)$, pošto su D_2 i D' prvog a D trećeg stepena u vremenskim intervalima. Kako je po Gauss-ovim izrazima samo $\Delta \rho_2 = O(\tau)$, to su u konačnom rezultatu Gibbs-ovi izrazi ipak za dva stepena „jači" od Gauss-ovih.

Međutim i Gibbs-ovi izrazi, pre nego što dođu aproksimacijama do konačnog rešenja, moraju u prvom koraku da pođu od $r_1 = r_2 = r_3$. Autor u četvrtom delu posebno analizira uticaj ove činjenice, polazeći opet od (5), ali su sada Δ greške usled $r_1 = r_2 = r_3$. Nalazi njen efekat u drugom delu greške iz (6). Pri tome je [3] $\eta = (rr'):r^2$ uglavnom mala veličina važna za converegenciju redova ove vrste. Tako prvi korak ne daje ništa više nego što dobijamo sa Gauss-ovim izrazima. Tek sledeći koraci dovode do daljeg smanjenja druge greške iz (6) i do konačnog $\Delta \rho = O(\tau^3)$.

Na kraju autor odgovara na pitanje koliko vredi komplikovati račun Gibbs-ovim izrazima. Pošto sumiranjem prethodnog utvrđuje da je veliki broj slučajeva u kojima Gibbs-ovi izrazi daju samo malo više od Gauss-ovih (skoro ekvidistantna posmatranja, mali nagib prema ekliptici, mala ekscentričnost, skoroperihelska posmatranja) to autor izvodi zaključak da za obična računska sredstva Gibbs-ovi izrazi nemaju prednosti nad Gauss-ovima. Ali u radu sa elektronskim mašinama oni mogu korisno poslužiti, jer tu dužina računa nije važna, a oni će ipak (nekad manje nekad više) dati tačnije rezultate nego Gauss-ovi izrazi.