РАЗЛАГАЊЕ КОНАЧНЕ РАЗЛИКЕ ФУНКЦИЈЕ ПО РАЗЛИКАМА ЊЕНИХ ИЗВОДА

Ковина Милошевић

1. *Ш. Е. Микеладзе* [1] служећи се једном својом интерполационом формулом [2, стр. 23] показао је да се коначна разлика функције може изразити разликама њених извода, тј. да је

$$\Delta^n f(a+\lambda h) = h^n \sum_{\rho=0}^{r} A_{n\rho}\, \Delta^\rho f^{(n)}(a) + R_{nr}, \tag{1}$$

где су коефицијенти $A_{n\rho}$ дати изразом

$$A_{n\rho} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \int_0^{\lambda+\nu} (\lambda+\nu-t)^{n-1} \binom{t}{\rho}\, dt, \tag{2}$$

а λ цео позитиван или негативан број. У истом раду он је дао и нумеричке вредности неколико првих коефицијената $A_{n\rho}$ за $\lambda=0$ и $n=1, 2, 3, 4$; $\rho=1, 2, \ldots, 7$.

Овде ћемо показати да се коефицијенти $A_{n\rho}$ своде на израз

$$A_{n\rho} = \frac{n!}{\rho!} \sum_{k=0}^{\rho} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{m=k}^{\rho} \frac{m!}{(m+n-k)!}\, S_\rho^m\, \sigma_{m+n-k}^n,$$

где су S_n^m и σ_m^n Stirling-ови бројеви прве, односно друге врсте, дефинисани обрасцима [3, стр. 163 и 169]

$$\binom{t}{\rho} = \frac{1}{\rho!} \sum_{m=0}^{\rho} S_\rho^m\, t^m, \tag{3}$$

$$\Delta^n t^m \Big|_{t=0} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^m = n!\, \sigma_m^n \tag{4}$$

тако да се израчунавање тих коефицијената своди углавном на израчунавање већ довољно проучаваних бројева S_n^m и σ_m^n.

Специјално, за $\lambda=0$, показаћемо да је формула (1) са коефицијентима

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}\,S_\rho^m\,\sigma_{m+n}^n$$

непосредна последица добро познатих релација рачуна коначних разлика.

2. Најпре је према (3)

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}\,dt=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\int_0^x (x-t)^{n-1}t^m\,dt=$$

$$=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\,x^{m+n}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^m\,dt.$$

Одавде, с обзиром да је

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^m\,dt=\frac{m!\,(n-1)!}{(m+n)!},$$

непосредно следи

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}\,dt=\frac{(n-1)!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\,\frac{m!}{(m+n)!}\,x^{m+n}.$$

Стављајући $x=\lambda+\nu$ добијамо да је

$$A_{n\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{(n-1)!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\,\frac{m!}{(m+n)!}(\lambda+\nu)^{m+n},$$

тј.

$$A_{n\rho}=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}\,S_\rho^m\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\lambda+\nu)^{m+n}. \tag{5}$$

Према биномном обрасцу и (4) имамо

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\lambda+\nu)^{m+n}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}\lambda^k\nu^{m+n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}\lambda^k\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\nu^{m+n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}\lambda^k\,n!\,\sigma_{m+n-k}^n.$$

Како је према (4) $\sigma_{m+n-k}^{n}=0$ за $k>m$, то је

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\lambda+\nu)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+n}{k}\lambda^{k}\,n!\;\sigma_{m+n-k}^{n}.$$

Према томе образац (5) постаје

$$A_{n\rho}=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!\;n!}{(m+n)!}\,S_{\rho}^{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+n}{k}\lambda^{k}\,\sigma_{m+n-k}^{n},$$

односно

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{k=0}^{\rho}\frac{\lambda^{k}}{k!}\sum_{m=k}^{\rho}\frac{m!}{(m+n-k)!}\,S_{\rho}^{m}\,\sigma_{m+n-k}^{n}.$$

3. Специјални случај обрасца (1) кад је $\lambda=0$, као што смо већ напоменули непосредно следи из познатих образаца [**3,** стр. 190, 165]

$$\Delta^{n}f(a)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(m+n)!}\,h^{m+n}f^{(m+n)}(a)\,\sigma_{m+n}^{n}$$

и

$$f^{(m)}(a)=\sum_{\rho=m}^{\infty}\frac{m!\;\Delta^{\rho}f(a)}{h^{m}\,\rho!}\,S_{\rho}^{m}.$$

Тада је, наиме

$$f^{(m+n)}(a)=\sum_{\rho=m}^{\infty}\frac{m!\;\Delta^{\rho}f^{(n)}(a)}{h^{m}\,\rho!}\,S_{\rho}^{m}$$

па је према томе

$$\Delta^{n}f(a)=h^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!\;n!}{(m+n)!}\,\sigma_{m+n}^{n}\sum_{\rho=m}^{\infty}\frac{\Delta^{\rho}f^{(n)}(a)}{\rho!}\,S_{\rho}^{m},$$

тј.

$$\Delta^{n}f(a)=h^{n}\sum_{\rho=0}^{\infty}A_{n\rho}\;\Delta^{\rho}f^{(n)}(a),$$

где је

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}\,S_{\rho}^{m}\,\sigma_{m+n}^{n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[ ] *Ш. Е. Микеладзе*, Разложение конечной разности от функции по разностям от ее производной. *Доклады Акад. Наук СССР*, 92, 3, стр. 479—482, (1953).

[2] *Ш. Е. Микеладзе*, Численное интегрирование, *Успехи математических наук*, 3, 6, стр. 3—88, (1948).

[3] *C. Jordan*, Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939.

Résumé

DÉCOMPOSITION D'UNE DIFFÉRENCE FINIE D'UNE FONCTION SUIVANT LES DIFFÉRENCES DE SES DÉRIVÉES

K. Milošević

On montre que les coefficients

$$A_{n\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int_{0}^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}\,dt,$$

de la formule

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=h^n\sum_{\rho=0}^{r}A_{n\rho}\,\Delta^\rho f^{(n)}(a)+R_{nr}, \tag{1}$$

obtenue par *S. E. Mikeladze* [1], peuvent être exprimés sous la forme

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{k=0}^{\rho}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{m=k}^{\rho}\frac{m!}{(m+n-k)!}\,S_\rho^m\,\sigma_{m+n-k}^n$$

où S_n^m et σ_m^n sont les nombres de Stirling de première et deuxième espèce.

D'après cela le calcul des coefficients $A_{n\rho}$ peut être effectué à l'aide des valeurs calculées des nombres de Stirling.

Dans le cas particulier $\lambda=0$, on montre que la formule (1) avec

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}\,S_\rho^m\,\sigma_{m+n}^n$$

n'est qu'une conséquence immédiate des relations bien connues de calcul des différences finies.