ИСТРАЖИВАЊА У ВЕЗИ СА ЈЕДНОМ ВАЖНОМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ ЈЕДНАЧИНОМ ПРВОГ РЕДА

И. Бандић, (Београд)

Диференцијална једначина првог реда

$$y'^2 + y^2 = F^2 \tag{1}$$

где је $F \equiv F(x)$ произвољна функција променљиве x, на коју се, иначе, своде извесни проблеми геометрије и механике, припада типу диференцијалних једначина које се у општем случају не могу решити квадратурама. Због тога је истраживање ограничено на изналажење специјалних облика функција $F(x)$ за које је (1) интеграбилно.

У прво време је утврђено, [1], да $F(x)$ треба да има један од ових облика

$$\text{(I)}\; a\, e^{bx}, \quad \text{(II)}\; (a\,x+b)\, e^{\pm 2xi}, \quad \text{(III)}\; a \sin\frac{2}{3}x + b\cos\frac{2}{3}x.$$

Д. Митриновић је у више махова проширио круг интеграбилних једначина (1), [2] и [3].

Овде ће бити постављена веза између (1) и једне алгебарске једначине m-ог степена, тако да сваком решењу алгебарске једначине, за дату вредност m, одговара једна вредност $F(x)$ за коју се (1) решава квадратурама. На тај се начин круг интеграбилних једначина (1) може произвољно проширити.

При трансформисању једначине (1) биће примењени релативни изводи М. Петровића, [4].

1° М. Петровић уводи појам релативног извода n-ог реда функције $y \equiv y(x)$ дефиницијом

$$\Delta_n(y) = \frac{y^{(\nu)}}{y}; \quad \left(y^{(\nu)} = \frac{d^n y}{d x^n}\right),$$

одакле налази многобројне везе међу релативним изводима за разне комбинације функција.

Овде ће бити искоришћени односи

$$\Delta_1(u\,v) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v);\ \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_1(u) - \Delta_1(v);\ \Delta_1(u^n) = n\,\Delta_1(u);$$

$$\Delta_2(u) = \Delta_1'(u) + \Delta_1^2(u).$$

Непосредно из дефиниције следује

$$\Delta_1\left(\exp\int u\,dx\right) = \exp\int \Delta_1(u)\,dx = u,$$

где је

$$u \equiv u(x),\ v \equiv v(x).$$

2° Једначина (1) припада широј класи диференцијалних једначина првог реда

(2) $$a_0\,y'^n + a_1\,y^n = b_0$$

где су a_0, a_1 и b_0 произвољне функције променљиве x.

Применом оператора Δ_1 на обе стране једначине (2) долази се до једначине другог реда

$$a_0'\,\Delta_1^n(y) + n\,a_0\,\Delta_1^{n-1}(y)\,\Delta_2(y) + a_1' + n\,a_1\,\Delta_1(y) -$$

$$[a_0\,\Delta_1^n(y) + a_1]\,\Delta_1(b_0) = 0.$$

Уводећи функцију z супституцијом

(3) $$\Delta_1(y) = \frac{1}{z}$$

последња једначина постаје

(4) $$z' = \frac{a_1}{n\,a_0}\,\Delta_1\left(\frac{a_1}{b_0}\right) z^{n+1} + \frac{a_1}{a_0}\,z^n + \frac{1}{n}\,\Delta_1\left(\frac{a_0}{b_0}\right) z + 1$$

Нека је $z \equiv z(x, c)$ општи интеграл ове једначине. Пошто је из (3)

$$y' = \frac{y}{z}$$

то се сменом те вредности у (2) долази до општег интеграла једначине (2)

(5) $$y = z\left(\frac{b_0}{a_0 + a_1\,z^n}\right)^{\frac{1}{n}};\ z \equiv z(x, c)$$

(2. 1) Једначина (2), за $a_0 = a_1 = 1$, $b_0 = F^2$, своди се на (1), којој сада одговара, према (4), Abel-ова једначина

$$z' = -\Delta_1(F)\, z^3 + z^2 - \Delta_1(F)\, z + 1,$$

или

$$z' = (z^2 + 1) . [1 - z\, \Delta_1(F)] \tag{6}$$

Општи интеграл једначине (1) је, на основу (5)

$$y = F z \cdot (z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

где $z \equiv z(x, c)$ претставља општи интеграл једначине (6).

Према томе, треба испитати интеграбилност једначине (6).

3° Ако је $z = z_1$ партикуларан интеграл једначине (6), онда се сменом

$$z = u + z_1 \tag{8}$$

где је $u \equiv u(x)$, из (6) налази

$$u' = -\Delta_1(F)\, u^3 + [1 - 3 z_1 \Delta_1(F)]\, u^2 + [2 z_1 - \Delta_1(F) - 3 z_1^2 \Delta_1(F)]\, u,$$

одакле се делењем са u, добије

$$\Delta_1 \left\{ u \exp \int (\Delta_1(F)\, u^2 + [3 z_1 \Delta_1(F) - 1]\, u)\, dx \right\} = \Delta_1(\lambda)$$

односно

$$u \exp \int (\Delta_1(F)\, u^2 + [3 z_1 \Delta_1(F) - 1]\, u)\, dx = \lambda, \tag{9}$$

где је

$$\lambda = \frac{1}{F} \exp \int z_1 [2 - 3 z_1 \Delta_1(F)]\, dx \tag{10}$$

Увођењем нове функције ω супстутуцијом

$$\Delta_1(F)\, u^2 + [3 z_1 \Delta_1(F) - 1]\, u = \Delta_1\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{11}$$

из (9) се налази

$$u = \lambda\, \omega, \tag{12}$$

а елиминисањем u из (11) и (12)

$$\omega' = -\lambda^2 \Delta_1(F)\, \omega^3 + \lambda [1 - 3 z_1 \Delta_1(F)]\, \omega^2. \tag{13}$$

Нека је $\omega = \omega(x, c)$ општи интеграл једначине (13). Тада се општи интеграл једначине (1) добије из (7), (8) и (12)

(14) $$y=(\lambda\,\omega+z_1)\,[1+(\lambda\,\omega+z_1)^2]^{-\frac{1}{2}}F,$$

где је λ дато изразом (10).

(3. 1) Два партикуларна интеграла једначине (6) су, очевидно, $z=\pm i$. Узимајући $z_1=i$, из (10) се налази

(15) $$\lambda=F^2\,e^{2xi}$$

а (13) се трансформише у једначину

(16) $$\omega'=-F^3F'\,e^{4xi}\,\omega^3+F\,(F-3\,i\,F')\,e^{2xi}\,\omega^2.$$

(3. 2) Једначина (16) решава се квадратурама, између осталог, кад је задовољен услов Chielline-ja, [5], који се састоји у следећем.

Ако је могуће одредити константу k, тако да коефицијентн једначине

$$z'=m_0,z^3+m_1\,z^2,$$

где су m_0 и m_1 функције променљиве x, задовољавају услов

(18) $$\left(\frac{m_0}{m_1}\right)'=k\,m_1,$$

онда се (17) супституцијом

(19) $$z=\frac{m_1}{m_0}\eta,\quad \eta\equiv\eta\,(x)$$

трансформише у једначину

(20) $$\eta'=\frac{m_1^2}{m_0}(\eta^3+\eta^2+k\,\eta)$$

у којој су променљиве раздвојене.

(3. 2. 1) Услов (18), примењен на једначину (16), гласи

$$2\,i+\Delta_1\left(\frac{F^2F'}{3\,i\,F'-F}\right)=-\frac{k}{FF'}(3\,i\,F'-F)^2.$$

Уводећи функцију $\vartheta\equiv\vartheta\,(x)$ сменом

(21) $$\Delta_1\,(F)=\vartheta$$

последња једначина постаје

(22) $$\vartheta' = (3i\vartheta - 1)\cdot[(2-9k)\vartheta^2 + 2i(1-3k)\cdot\vartheta + k]$$

Њен општи интеграл је

(23) $$(\vartheta-\vartheta_1)^{\vartheta_3-\vartheta_2}\cdot(\vartheta-\vartheta_2)^{\vartheta_1-\vartheta_3}\cdot(\vartheta-\vartheta_3)^{\vartheta_2-\vartheta_1} = \varepsilon,$$

где је

(24) $$\vartheta_1 = -\frac{i}{3}\quad \vartheta_{2/3} = \frac{i(3k-1)\pm\sqrt{4k-1}}{2-9k};$$

$$\varepsilon = \exp\frac{8i\sqrt{4k-1}}{3(2-9k)}(x+a),\quad (a\equiv\text{const.})$$

Кад се у (23) уведе нова константа m сменом

(25) $$k = \frac{(3m-1)(3m-2)}{9(2m-1)^2}$$

добије се

$$\left[\vartheta - \frac{i(3m-2)}{3m}\right]^m\cdot\left[\vartheta - \frac{i(3m-1)}{3(m-1)}\right]^{1-m} = \left(\vartheta+\frac{i}{3}\right)\exp\frac{4(x+a)}{3}i$$

Коначно, увођењем нове функције η супституцијом

(26) $$\vartheta = \frac{(m-1)(3m-2) - m(3m-1)\eta}{m(m-1)(1-\eta)},$$

долази се до алгебарске једначине

(27) $$\eta^m = E[m\eta + (1-m)],\quad E = \exp\frac{4(x+a)}{3}i$$

Узевши у обзир (21), из (26) се налази

(28) $$F = b\exp\left[\frac{3m-1}{3(m-1)}ix + \frac{2(2m-1)}{3m(m-1)}i\int\frac{dx}{\eta-1}\right];\quad (b\equiv\text{const.})$$

где η претставља једно решење алгебарске једначине (27).

Према томе, једначина (1) решава се квадратурама кад је F дато изразом (28), а њен општи интеграл је у том случају, на основу (14)

$$y = (F^2e^{2xi}\omega + i)\,[\omega(F^2e^{2xi}\omega + 2i)]^{-\frac{1}{2}}e^{-xi}\cdot$$

где је, према услову Chiellini-ja

$$\omega = \frac{3\,i\,F' - F}{F\,F'}\,e^{-2xi}\,u,$$

а u претставља општи интеграл једначине

$$u' = \frac{3\,i\,F' - F}{F\,F'}\,(u^3 + u^2 + k\,u^2);\ k = \frac{(3\,m-1)\,(3\,m-2)}{9\,(2\,m-1)^2}\,.$$

(3. 2. 2) Наводимо, примера ради, неколико случајева кад се (1) решава квадратурама при наведеним условима

$$m = -1;\ F = b\,(\sqrt{E} + \sqrt{E-1})^{\pm\frac{3}{2}}.\exp\frac{2\,x\,i}{3},$$

$$m = 2;\ F = b\,(\sqrt{E} - \sqrt{E\,(E-1)})^{\frac{3}{2}}.\exp\frac{5\,x\,i}{3},$$

$$m = -2;\ F = b\left[\frac{2\,(\cos\frac{1}{3}\,\text{arc}\cos\frac{2-E}{E} + 1)}{2\cos\frac{1}{3}\,\text{arc}\cos\frac{2-E}{E} - 1}\right]^{\frac{7}{6}}\exp\frac{7\,x\,i}{3},\ \text{и т. д.}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Облик (I) уводи *М. Петровић*, L'intermédiaire des Mathématiciens, t. III. p. 231, 1904, облик (II) Rivereau, L'intermédiaire des Mathématiciens, t. XI, p. 282, 1904.

[2] *Д. Митриновић*, Истраживања о једној важној диференцијалној једначини првог реда (теза), Београд, 1935.

[3] *D. Mitrinovitch*, Sur l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces spirale, Comptes rendus des séance de l'Acadèmie des Sciences, t. 205, p. 1194, 1937.

[4] *М. Петровић*, Један диференцијални алгоритам и његове примене, посебна издања САН, Књига CXI, 1936.

[5] *A. Chiellini*, Bolletino della Unione Matematica Italiana, 10, стр. 301—307, Bologna, 1931.

Zussammenfassung

ÜBER EINE WICHTIGE DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

I. Bandić

Die Differentialgleichung (1), welche im manchen Problemen der Geometrie und Mechanik auftritt, wird in Abel-sche Gleichung (6), mittelst der relativ — Ableitungen von M. Petrovitch, 1°, transformiert. Die Gleichung (6) reduziert sich dannach mittelst der Particular — Integral $z = i$ auf Gleichung (16). Diese Gleichung ist integrierbar wenn die Bedingungen von Chiellini (18), oder die algebraische gleichung (27), erfüllt sind.

Man erhält also aus (28) für jede Lösung η der Gleichung (27) einen wert der Funktion $F \equiv F(x)$, für welchen man (16), und damit auch (1) durch Kvadraturen auflösen kann.