Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија кн. VII, 1956.
Bulletin da la Société des mathématiciens et des physiciens de la R. P. Macédoine t. VII, 1956.

ЗА ДВА ВЕКТОРСКИ ИДЕНТИТЕТА

Виктор Јанекоски

Во стандардните дела по векторско сметање {[1], p. 32} го наоѓаме идентитетот

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0 \tag{1}$$

додека кај Chattelun {[2], p. 216} го наоѓаме и идентитетот

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}+\vec{a})\times\vec{b}=0. \tag{2}$$

Идентитетот (1) — којшто го заместува асоцијативниот закон за векторски производ {[3], p. 101} бидејќи истиот за него не важи — односно идентитетот (2), во литературата се докажува со помош на формулата за двојниот векторски производ односно дистрибутивниот закон за векторското множење. Поради важноста на двата идентитета (1) и (2) и нивната примена во геометријата {[1], p. 33; [2], p.: 212, 215}, даваме два непосредни векторски доказа на истите.

1. Ако ја означиме левата страна на идентитетот (1) со $\vec{G}$:

$$\vec{G}\equiv(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}, \tag{3}$$

имаме по скаларно множење со произволните вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{G}\cdot\vec{a}=0,\quad \vec{G}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{G}\cdot\vec{c}=0, \tag{4}$$

бидејќи е, со соодветна примена на правилото за циклична замена во мешаните производи, на пример

$$\vec{G}\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$$

што, поради комутативноста на скаларниот и алтернативноста на векторскиот производ, дава $\vec{G}\cdot\vec{a}=0$. Аналогно, ако се направи циклична замена на векторите $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a}$, важи и: $\vec{G}\cdot\vec{b}=0$ и $\vec{G}\cdot\vec{c}=0$, пак, од системата на равенките (4), добиваме

$$\vec{G}=0,$$

што требаше и да се докаже.

Системата (4) дава $\vec{G}=0$ и за случај на компланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Имено, — земајќи предвид дека сите три двојни векторски производи што се наоѓаат во изразот (1) лежат во рамнината на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — и векторот $\vec{G}$ од изразот (3) лежи во рамнината на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. За неколинеарните пак вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ спрема (4) имаме $\vec{G}\cdot\vec{a}=0$, $\vec{G}\cdot\vec{b}=0$, коешто веднаш дава $\vec{G}=0$. Ако се $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори а $\vec{c}$ не е со нив колинеарен, тогаш системата $\vec{G}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{G}\cdot\vec{c}=0$ дава пак $\vec{G}=0$. Најпосле, ако се $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ колинеарни вектори, тогаш е $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}=0$ и (1) непосредно се проверува. Идентитетот (1) — за овој случај, на компланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — може да се докаже и со помош на дистрибутивниот закон за векторско множење, ако се земе предвид дека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се сега линеарно зависни вектори.

2. За докажување на идентитетот (2), слично како во точ. **1**, го множиме скаларно векторот

$$\vec{H}\equiv(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}+\vec{a})\times\vec{b} \tag{5}$$

со произволните вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ односно — ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се и компланарни вектори — со нпр., векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$[1]). Меѓутоа, (2) понепосредно се докажува ако изразот $\vec{H}$ од (5) го помножиме скаларно со еден помошен произволен, од нула различен, вектор $\vec{\lambda}$ како што слично постапуваат некои автори {[2], p. 164; [4], p. 345} при докажувањето на дистрибутивниот закон за векторско множење.

Тука ќе наведеме една особина на идентитетот (2) со помош на која може да се докаже дистрибутивниот закон за векторско множење (6). Ако е даден идентитетот (2) — водејќи сметка за тривијалниот идентитет

---

[1]) За компланарните $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, при докажувањето на (2), очигледно доволно е (5) скаларно да се помножи само со векторот $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \omega \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

(ω = произволен скалар)

– можеме изразите $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{a}$, $(\vec{c}+\vec{a}) \times \vec{b}$ да ги трансформираме респективно во $(\vec{a}+\vec{b}) \times [\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})]$, $[(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}] \times \vec{a}$, $[(\vec{c}+\vec{a})+\vec{b}] \times \vec{b}$, така што (2) сега гласи:

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}) \times \vec{a} + (\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{b} = 0,$$

од каде, ако насекаде векторот $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$ го заместиме со векторот $\vec{c}$, ја добиваме релацијата

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} = 0, \tag{6}$$

што сакавме и да докажеме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lagally M., *Vektor=Rechnung*, 4. Aufl., Leipzig, 1949.
[2] Chattelun L., *Calcul vectoriel*, t. I, Paris, 1952.
[3] Делоне Б.—Райков Д., *Аналитическая геометрия*, т. I, Москва—Ленинград, 1948.
[4] Лопшиц А., *Аналитическая геометрия*, Москва, 1948.

Résumé

SUR LES DEUX IDENTITÉS VECTORIELLES

V. Janekoski

Dans cette Note on expose les démonstrations immédiates des théorèmes (1) et (2) qu'ils ont les applications géométriques {voir [1], p. 33 et [2], p.: 212, 215}