О ЈЕДНОМ ГЕНЕРАЛИСАНОМ ГЕОМЕТРИСКОМ РЕДУ

Ковина Милошевић

1. Посматраћемо ред

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)\, d]^n\, x^k, \tag{1}$$

где је n природан број, а $|x| < 1$.

Овај ред је генерализација геометриског реда

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x},$$

а ред

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k,$$

кога је посматрао *R. Staley* [1], такође је специјалан случај реда (1), где је $a = d = 1$.

Ако диференцирамо ред (1) имаћемо

$$F_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, [a + (k-1)\, d]^n\, x^{k-1}.$$

Даље имамо

$$x d\, F_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kd\, [a + (k-1)\, d]^n\, x^k,$$

па ако додамо левој и десној страни израз

$$(a-d)\, F_n(x) = (a-d) \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)\, d]^n\, x^k,$$

имаћемо

$$x d\, F_n'(x) + (a-d)\, F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)\, d]^n\, [a + (k-1)\, d]\, x^k,$$

тј.
$$xd\,F_n'(x)+(a-d)\,F_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a+(k-1)\,d]^{n+1}\,x^k.$$

Дакле, имамо рекурзивну формулу за израчунавање реда $F_n(x)$

$$F_{n+1}(x)=xd\,F_n'(x)+(a-d)\,F_n(x). \tag{2}$$

Пошто је
$$F_0(x)=\frac{x}{1-x},$$

добићемо користећи формулу (2)

$$F_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\left\{a+(d-a)\,x\right\},$$

$$F_2(x)=\frac{x}{(1-x)^3}\left\{(d-a)^2\,x^2+(d^2+2\,ad-2\,a^2)\,x+2\,ad-d^2\right\}$$

$$F_3(x)=\frac{x}{(1-x)^4}\Big\{(d-a)^3\,x^3+[(a+d)^3-4a^3]\,x^2+[(a+2\,d)^3$$
$$-4\,(a+d)^3+6a^3]\,x+(a+3d)^3-4\,(a+2\,d)^3+6\,(a+d)^3-4\,a^3\Big\},$$

тако да уопште можемо ставити

$$F_n(x)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}\,P_n(x), \tag{3}$$

где је $P_n(x)$ полином n-тог степена.

Из рекурзивне формуле (2), с обзиром на релацију (3) и на релацију

$$F_n'(x)=\frac{1}{(1-x)^{n+2}}\left\{(nx+1)\,P_n(x)+x\,(1-x)\,P_n'(x)\right\},$$

добијамо

$$P_{n+1}(x)=\left\{(nd+d-a)\,x+a\right\}\,P_n(x)+xd\,(1-x)\,P_n'(x). \tag{4}$$

Овом рекурзивном релацијом можемо поступно израчунати полиноме $P_n(x)$.

2. Ставићемо сада

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}K_r^n\,(a,d)\,x^r,$$

тако да је

$$P_n'(x) = \sum_{r=1}^{n} r\, K_r^n(a, d)\, x^{r-1},$$

па с обзиром да је

$$P_{n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a, d)\, x^r,$$

добићемо заменом у (4)

$$\sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a, d)\, x^r = \sum_{r=0}^{n} K_r^n(a, d)(nd + d - a)\, x^{r+1} + \sum_{r=0}^{n} a K_r^n(a, d)\, x^r$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} rd\, K_r^n(a, d)\, x^r - \sum_{r=1}^{n} rd\, K_r^n(a, d)\, x^{r+1}.$$

Изједначавањем коефицијената пред x^{r-1} добићемо

$$K_r^{n+1}(a, d) = \left\{(n - r + 2)\, d - a\right\} K_{r-1}^n(a, d) + (a + dr)\, K_r^n(a, d),$$

тј.

$$(5) \qquad K_r^n(a, d) = \left\{(n - r + 1)\, d - a\right\} K_{r-1}^{n-1}(a, d) + (a + dr)\, K_r^{n-1}(a, d).$$

Одавде се добија

$$(6) \qquad K_r^n(a, d) = \sum_{i=1}^{n-r} \left\{a + rd\right\}^{i-1} \left\{(n - r + 2 - i)\, d - a\right\} K_{r-1}^{n-i}(a, d).$$

Из рекурзивног обрасца (5) имамо

$$K_0^n(a, d) = \left\{(n + 1)\, d - a\right\} K_{-1}^n(a, d) + a\, K_1^{n-1}(a, d),$$

па како је $K_{-1}^n(a, d) = 0$, имаћемо

$$K_0^n(a, d) = a\, K_0^{n-1}(a, d) = a^2 K_0^{k-2}(a, d) = \cdots = a^n K_0^0(a, d) = a^n,$$

јер је $K_0^0(a, d) = 1$.

С обзиром на почетни услов $K_0^n(a, d) = a^n$ и на релацију (6) добијамо поступно

$$K_0^n(a, d) = a^n$$

$$K_1^n(a, d) = (a+d)^n - \binom{n+1}{1} a^n$$

$$K_2^n(a, d) = (a+2d)^n - \binom{n+1}{1} (a+d)^n + \binom{n+1}{2} a^n$$

. . . .

$$K_r^n(a, d) = (a+rd)^n - \binom{n+1}{1} [a+(r-1)d)^n + \cdots + (-1)^r \binom{n+1}{r} a_n,$$

тј.

$$K_r^n(a, d) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{n+1}{m} [a+(r-m)d]^n. \tag{7}$$

Образац (7) можемо једноставно доказати показавши да $K_r^n(a, d)$ задовољава рекурзивну релацију (5). Тако имамо

$$\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n = \{(n-r+1)d - a\} \sum_{m=0}^{r-1}(-1)^m\binom{n}{m}[a+$$

$$+(r-m-1)d]^{n-1} + (a+dr)\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n}{m}[a+(r-m)d]^{n-1}$$

$$= (a+dr)\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^{n-1} -$$

$$- md\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n,$$

чиме је, с обзиром на почетни услов $K_0^n(a, d) = a^n$, образац (7) доказан.

3. Показаћемо сада да се коефицијенти полинома $P_n(x)$, којим смо изразили генералисани геометриски ред (1), јављају при развијању степена

$$(a-xd)^n$$

у специјални биномни ред.

Према *L. Carlitz*-овим резултатима [2, стр. 240], познато је да *ако је $f(x)$ произвољни полином степена $\leqslant n$, тада је*

$$(8) \qquad f(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} C_r \binom{x+k-1}{n},$$

где су коефицијенти C_r дефинисани са

$$(9) \qquad C_r = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{n+1}{m} f(m-r).$$

Ставивши сада

$$f(x) = (a - xd)^n,$$

добијамо да је

$$(a - xd)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} C_r' \binom{x+k-1}{n},$$

где је

$$C_r' = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m) d]^n.$$

Очигледно је да су коефицијенти C_r' идентични коефицијентима $K_r^n(a,d)$, те имамо

$$(10) \qquad (a - xd)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} K_r^n(a, d) \binom{x+k-1}{n}.$$

Ако на израз (10) извршимо операцију

$$\Delta^n f(x) = \Delta [\Delta^{n-1} f(x)],$$

где је

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

имајући при том у виду познате релације [3, стр. 181, 69]

$$\Delta^n x^k = \sum_{\nu=1}^{k} (\nu)_n \, \sigma_k^\nu \, (x)_{\nu-n}$$

$$\Delta^n \binom{x}{m} = \binom{x}{m-n},$$

где су σ_m^n *Stirling*-ови бројеви II врсте, а

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

добићемо рекурзивну релацију између коефицијената $K_r^n(a,d)$,

$$(11)\quad \sum_{r=0}^{n} K_r^n(a,d) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^k d^{n-k} \sum_{\nu=1}^{n-k} (\nu)_m\, \sigma_{n-k}^{\nu}\, (x)_{\nu-n}.$$

Напоменућемо још да код *Nielsen*-а [4, стр. 28] налазимо израз

$$\beta_r^n(\alpha) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{n+1}{m} (\alpha + r - m)^n,$$

који је са коефицијентима $K_r^n(a,d)$ везан релацијом

$$K_r^n(a,d) = d^n\, \beta_r^n\left(\frac{a}{d}\right).$$

С обзиром на образац (13) [4, стр. 238] добијамо релацију

$$(12)\quad \frac{2d^n(2^{2n}-1)B_n}{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \left[\binom{\frac{a}{d}+m}{2n} - \binom{\frac{a}{d}+m-\frac{1}{2}}{2n}\right] K_m^{2n-1}(a,d),$$

којом се Bernoulli-еви бројеви, дефинисани са

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{m-1} \binom{n+1}{2m} B_m = \frac{n-1}{2}, \qquad (n \geqslant 2)$$

изражавају коефицијентима $K_r^n(a,d)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. Staley*, A Generalization of the Geometric Series, Amer. Math. Monthly, 56, 1949, p. 325—327.

[2] *L. Carlitz*, Note on a paper of Shanks, Amer. Math. Monthly, 59, 1952, p. 239—241.

[3] *C. Jordan*, Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939.

[4] *N. Nielsen*, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923.

Résumé

SUR UNE SÉRIE GÉOMETRIQUE GÉNÉRALISÉE

K. Milošević

On donne pour la série géometrique généralisée

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a+(k-1)d]^n x^k,\ n \text{ nombre naturel, } |x|<1,$$

la forme

$$F_n(x)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}P_n(x),$$

avec

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)\,x^r,$$

où les coefficients $K_r^n(a,d)$, intervienantes aussi dans l'expression

$$(a-xd)^n=(-1)^n\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)\binom{x+k-1}{n},$$

sont obtenus sous la forme

$$K_r^n(a,d)=\sum_{m=0}^{r}\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n.$$