KEPLER-LEĜOJ POR LA PERTURBATA PLANEDMOVIĜO

Popović Bož., (Sarajevo)

Al multaj ekvacioj el moviĝo de planedo oni povas ankaŭ ĉe la perturbata moviĝo doni tute samajn formojn kiaj estas por neperturbata moviĝo, aldone ke iuj kvantoj ne plu estas konstantaj sed negrave variaj depende de la perturboforto F (v. ekz. [1]). Eĉ oni povas fari tion por moviĝo de dukorpa centro ĉirkaŭ la tria korpo [3]. Sed tio ne signifas ke oni povas tiel trakti ĉiujn ekvaciojn el la neperturbata moviĝo — iuj ŝanĝas la formon dum transiro al la perturbata moviĝo. Trovinte unu tian (la sube indikita rilataĵo pri la sektorrapido), mi entreprenis la provon ĝeneraligi la Keplerajn leĝojn. Pro tio en ĉi tiu artikolo mi donos tri ekvaciojn esprimantaj la rilatojn de perturbata planedmoviĝo kaj havantaj formojn similaj al Kepleraj leĝoj, kondukonte al ili se la perturboforto ĉesus agi.

1. La pozici- kaj rapid-vektoro estas donataj ([1], p. 123, 132) per la esprimoj

$$\mathbf{r} = \frac{\mu\cos u - D}{E^2 D}\,\mathbf{D} + \frac{\sin u}{ED}\,[\mathbf{CD}], \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{\mu\sin u}{EDr}\,\mathbf{D} + \frac{\cos u}{Dr}\,[\mathbf{CD}], \tag{2}$$

ĉee

$$\mu u - D\sin u = \int_T^t E^3\,dt, \tag{3}$$

$$\mu = k^2(m+M), \quad E^2 = (\mu^2 - D^2) : C^2, \tag{4}$$

kaj la vektoraj elementoj **C**, **D**, T, ne estas tute konstantaj, sed ili kontentigas konatajn perturboekvaciojn [1]. Oni devas mencii ankoraŭ ke

$$\mathbf{C} = [\mathbf{rv}], \tag{5}$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{vC}] - \frac{\mu\mathbf{r}}{r}. \tag{6}$$

Signu per η la angulon inter la perihelidirekto kaj la pozicivektoro, t. e. la veran anomalion de la planedo, kiu estas ligita kun la necentra anomalio per la substituo

$$\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}=\sqrt{\frac{\mu+D}{\mu-D}}\cdot\operatorname{tg}\frac{u}{2}; \tag{7}$$

tiam (6), apud (5), donas

$$rD\cdot\cos\eta=(\mathbf{rD})=(\mathbf{rvC})-\mu r=C^2-\mu r,$$

de kie tuj

$$r=\frac{p}{1+e\cdot\cos\eta},\quad p=\frac{C^2}{\mu},\quad e=\frac{D}{\mu}. \tag{8}$$

Ĉi tiu ekvacio esprimas la unuan Kepler-leĝon, ĉee la parametro kaj la necentrikeco de elipso fariĝas tute konstantaj nur kiam la perturboforto forestus, dume ili kontentigas la diferencialajn ekvaciojn ([2], p. 17):

$$\frac{de}{dt}=\frac{C}{\mu D}\,D\sin\eta\,(\mathbf{Fr}^0)+(C^2-E^2r^2)\,\frac{(\mathbf{F}[\mathbf{Cr}]^0)}{r},$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{2}{\mu}\,(\mathbf{F\,Cr}).$$

2. Ekirante de (5) ŝajnas tute logike ke $r^2.\dfrac{d\eta}{dt}=C$, tiom pli ĉar $\mathbf{r}=r.\mathbf{r}^0$, $\mathbf{v}=\dfrac{dr}{dt}.\ \mathbf{r}^0+r.\dfrac{d\mathbf{r}^0}{dt}$, kaj tio donas

$$r^2\left[\mathbf{r}^0\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}\right]=\mathbf{C},\ \text{t. e.}\ r^2\left|\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}\right|=C.$$

Sede oni akiras iom alian esprimon. Por akiri ĝin ekiru denove de (8) kaj derivu ĝin:

$$(1+e\cos\eta)\frac{dr}{dt}+r\cos\eta\frac{de}{dt}-re\sin\eta\frac{d\eta}{dt}=\frac{dp}{dt},$$

resp.

$$\frac{p}{r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{p-r}{e}\cdot\frac{de}{dt}-\frac{1}{\mu C}(\mathbf{r}[\mathbf{CD}])\frac{d\eta}{dt}=\frac{dp}{dt},$$

Konsiderante la esprimon (6) por $\mathbf{D}$ oni havas $(\mathbf{r}[\mathbf{CD}])=C^2(\mathbf{rv})$; sciante ke $r\cdot\dfrac{dr}{dt}=(\mathbf{rv})$ kaj utiliginte la esprimon (8) por p kaj e, ni trovos

$$C^2(\mathbf{rv})+r^2\cdot\frac{C^2-\mu r}{D}\cdot\frac{dD}{dt}-r^2\cdot\frac{dC^2}{dt}=r^2\,C(\mathbf{rv})\,\frac{d\eta}{dt},$$

t. e.

$$r^2\cdot\frac{d\eta}{dt}=C+\frac{r^2}{C(\mathbf{rv})}\cdot\frac{C^2-\mu r}{D}\cdot\frac{dD}{dt}-\frac{dC^2}{dt}. \tag{9}$$

En kazo de la neperturbata moviĝo **C** kaj **D** ne ŝanĝiĝas kaj la ekvacio reduktiĝas al la dua Kelpera leĝo, dum en kazo de la perturbata moviĝo ĝi prezentas ĝeneraligon de la leĝo. Al la korektiga membro oni povas doni diversajn formojn, pli aŭ malpli eksplicajn, sed oni ne povas ĝin esence simpligi. Oni devas kontentiĝi ke $\left|\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}\right|\neq\frac{d\eta}{dt}$, ĉar (9) donas

$$\frac{d\eta}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}\right|+\frac{1}{C(\mathbf{rv})}\left[\frac{C^2-\mu r}{D}\cdot\frac{dD}{dt}-\frac{dC^2}{dt}\right]. \tag{10}$$

3. Por ĝeneraligo de la tria Kelpera leĝo, ankaŭ ĉi tie oni povas ekiri de (3), prenante por la ek-momento la tempon de la perihelitrapaso kaj integrali ĝis la sekvanta perihelia trapaso. Tiel por du planedoj ni havos

$$2\pi\mu_i=\int_0^{\tau_i}E_i^3\,dt=\tau_i(E_i^3)_0+\int_0^{\tau_i}\delta E_i^3\,dt,\quad i=1,2. \tag{11}$$

ĉee $(E_i^3)_0$ estas la konstanta parto kaj δE_i^3 estas ĝiaj perturboj, dum τ_i estas la rivolu-tempo de la planedo ĉirkaŭ la Suno (ĝi koncernas la rivoluon rilate la perihelion, ĉar la rivolutempo rilate iun konstantan ebenon ŝanĝiĝus de ebeno ĝis ebeno, pro kio ĝi ne konvenus). Do ni havos

$$\frac{\tau_1}{\mu_1}(E_1^3)_0+\frac{1}{\mu_1}\int_0^{\tau_1}\delta E_1^3\,dt=\frac{\tau_2}{\mu_2}(E_2^3)_0+\frac{1}{\mu_2}\int_0^{\tau_2}\delta E_2^3\,dt.$$

Sed ĉar $E^2=\mu/a$, oni devas kvadratumi la esprimojn. Oni neglektas la kvadratojn de la perturboj, resp. oni forigas kvadratojn de la planedmasoj, pro kio ni ricevos

$$\tau_1^2\left[(E_1^6)_0+2(E_1^3)_0\frac{1}{\tau_1}\int_0^{\tau_1}\delta E_1^3\,dt\right]=\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2\tau_2^2\left[(E_2^6)_0+\frac{2}{\tau_2}(E_2^3)_0\int_0^{\tau_2}\delta E_2^3\,dt\right].$$

La esprimo $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \delta E^3\, dt$ prezentas la mezan valoron de la perturboj de E^3 (de la meza tagmoviĝo) dum unu rivoluo, pro kio ĝi estas malgranda de si mem, kaj ne nur pro malgrandeco de la perturboj. Signu la konstantan parton de la rivolutempo per τ_0; oni trovas ĝin evidente el (11), t. e. el $2\pi\mu = E_0^3 \tau_0$. Sekve de tio, (11) donos plue

$$\int_0^\tau \delta E^3\, dt = 2\pi\mu - E_0^3\,\tau = 2\pi\mu - E_0^3\,\tau_0 - E_0^3\,\delta\tau = -E_0^3\,\delta\tau,$$

kaj la supra egalaĵo donas

$$\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{E_2}{E_1}\right)_0^6 \cdot \frac{1 - 2\,(\delta\tau_2):\tau_2}{1 - 2\,(\delta\tau_1):\tau_1}.$$

Estas bone konata ke la tria Kepler-leĝo estas nur proksimumaĵo por la neperturbata moviĝo (kiam $\mu_2 = \mu_1$), kio preskaŭ validas pro malgrandaj planedmasoj. Ĉi tie oni havas pluan ĝeneraligon de la tria Keplera leĝo; metinte $(E_i^2)_0 = \frac{\mu_i}{(a_i)_0}$ oni donas al ĝi la definitivan formon

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_0^3 \cdot \frac{\mu_2\,(1 - 2\,\delta\tau_2:\tau_2)}{\mu_1\,(1 - 2\,\delta\tau_1:\tau_1)}. \tag{12}$$

Tie oni trovos la perturbojn $\delta\tau$ derivonte (11):

$$E^3\,\delta\tau = -\int_0^\tau \delta E^3\, dt = 3\int_0^\tau\int_0^t E\,(\mathrm{vF})\, dt^2 -$$

— por δE^3 v. [1], p. 135.

LA MENCIITA LITERATURO:

[1] *Popović B.*: „Les équations nouvelles des perturbations dans le mouvement des planètes“ (BULLETIN de l'Académie serbe des sciences, Tome V, p. 123) aŭ „Novi oblici jednačina poremećaja...“ (GLAS Srpske Akad. nauka, CXCVIII, str. 129—139).

[2] *Popović B.*: „Nouvelle méthode pour obtenir les équations des perturbations des éléments elliptiques“ (MÉMOIRES de l'Observatoire astronomique de Belgrade, V, pp. 11—25).

[3] *Popović B.*: „Vektoraj elementoj de elipsa moviĝo de dukorpa masocentro ĉirkaŭ tria korpo“ (BULTENO de la Societo mat.-fiz. de Macedonio, V, 1956).

КЕПЛЕРОВИТЕ ЗАКОНИ ЗА ПОРЕМЕТЕНОТО ДВИЖЕНИЕ НА ПЛАНЕТИТЕ

Поповиќ Бож., (Сарајево)

Постојат повеќе односи помеѓу величините во пореметеното движение на кои што може да се даде ист облик како и во непореметеното движение на планетите, со тоа што некои параметри нема да се сосем константни. Користејќи ги изразите (1), (2) во векторските елементи C, D, T [1], авторот го добива најнапред равенството (8) (каде e и p ги задоволуваат диференцијалните равенки од [2], стр. 17), кое што ни го дава обопштениот прв Кеплеров закон. Потоа со неговото диференцирање и со други трансформации го добива изразот (9), кој што го обопштува другиот Кеплеров закон. Накрај со варирањето на односот (11) го добива (12) како обопштување на третиот Кеплеров закон.

Равенството (10) е пример за равенство што го променило обликот при преминувањето од непореметеното движение на пореметено.