VEKTORAJ ELEMENTOJ DE ELIPSA MOVIĜO DE DUKORPA MASOCENTRO ĈIRKAŬ TRIA KORPO

Popović Bož., (Sarajevo)

1 Kiam du korpoj (du planedoj, planedo kaj satelito, du satelitoj) moviĝas ĉirkaŭ tria korpo (Suno, planedo), tiam oni povas por la moviĝo de la mascentro de du korpoj trovi vektorajn elementojn per kiuj la moviĝo de la mascentro esprimiĝas en ekstere tute sama formo kia estas ĉe nur du korpoj, kondiĉe ke la elementoj ne estas konstantaj sed donataj per diferencialaj ekvacioj (havantaj la rolon de la perturbekvacioj de la elementoj).

Se m kaj m_1 signas relativajn masojn de du korpoj (rilate al ilia sumo) kaj M la mason de la ĉefa korpo, kaj se ni metos

$$k^2(m+M+m_1)=\gamma; \tag{1}$$

se plue $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}$, donas la poziciojn de du korpoj kaj de ilia masocentro rilate la ĉefan korpon, tiam la pozicio de la mascentro estos

$$\mathbf{s}=m\,\mathbf{r}+m_1\,\mathbf{r}_1, \tag{2}$$

kaj la moviĝekvacio de la mascentro estos

$$\ddot{\mathbf{s}}=-\gamma\,m\frac{\mathbf{r}}{r^3}-\gamma\,m_1\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}. \tag{3}$$

De tie oni tuj havos

$$[\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}}]=-mm_1[\mathbf{r}\mathbf{r}_1]\left(\frac{\gamma}{r_1^3}-\frac{\gamma}{r^3}\right). \tag{4}$$

De ĉi tiu esprimo oni vidas ke ĝi havos etan grandecon: 1) kiam unu el la kvantoj m, m_1 estas tre malgranda (t. e. kiam la masoj estas tre diversaj) kaj 2) kiam $\mathbf{r}$ kaj $\mathbf{r}_1$ proksime egalas (t. e. kiam du korpoj estas proksimaj unu al alia) senkonsidere ilian masrilaton. En ĉi tiuj du kazoj utilas serĉi apartajn, preskaŭ konstantajn, moviĝelementojn de la dukorpa mascentro. Oni povas ĝenerale diri ke la utileco de la serĉado de la elementoj dependas de pozicio de la *altir-centro* de tri korpoj rilate al ilia mascentro, ĉar la vektoro $\mathbf{s}$ trapasas la mascentron kaj $\ddot{\mathbf{s}}$ havas la direkton al la trikorpa altir-centro.

2 Altir-centro ([1], p. 78) estas la punkto en kiu kruciĝas la fortoj agantaj je tri korpoj. La poziciojn de tri korpoj rilate la altircentron signu per $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$, kaj rilate la mascentron per $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$. Krome $\mathbf{g}$ donu la pozicion de la altircentro rilate la mascentron. Tiam la vektoroj

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

donos la reciprokajn poziciojn de tri masoj; oni havos ankaŭ egalaĵojn

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{g} + \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{s}_{ij} = \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i. \tag{5}$$

La moviĝekvacioj estos

$$k^{-2}\ddot{\mathbf{s}}_1 = \frac{m_2}{s_{12}^3}\mathbf{s}_{12} + \frac{m_3}{s_{13}^3}\mathbf{s}_{13} = \frac{m_2}{s_{12}^3}\mathbf{g}_2 + \frac{m_3}{s_{13}^3}\mathbf{g}_3 - \left(\frac{m_3}{s_{13}^3} + \frac{m_2}{s_{12}^3}\right)\mathbf{g}_1$$

aŭ

$$k^{-2}\ddot{\mathbf{s}}_1 = -\left(\frac{m_1}{s_{11}^3} + \frac{m_2}{s_{12}^3} + \frac{m_3}{s_{13}^3}\right)\mathbf{g}_1, \quad k^{-2}\ddot{\mathbf{s}}_2 = - \tag{6}$$

$$-\left(\frac{m_1}{s_{12}^3} + \frac{m_2}{s_{22}^3} + \frac{m_3}{s_{23}^3}\right)\mathbf{g}_2, \quad k^{-2}\ddot{\mathbf{s}}_3 = \dots .$$

kun la signaĵoj s_{11}, s_{22}, s_{33}, donataj per

$$\frac{m_2}{s_{12}^3}\mathbf{g}_2 + \frac{m_3}{s_{13}^3}\mathbf{g}_3 = -\frac{m_1}{s_{11}^3}\mathbf{g}_1, \quad \frac{m_3}{s_{23}^3}\mathbf{g}_3 + \frac{m_1}{s_{12}^3}\mathbf{g}_1 = -\frac{m_2}{s_{22}^3}\mathbf{g}_2, \dots \tag{7}$$

Se oni la unuajn du el ĉi-kondiĉoj multiplikas vektore per $\mathbf{g}_2$ kaj $\mathbf{g}_1$, oni trovos

$$\left(m_1/s_{11}^3\right) : \left(m_1/s_{12}^3\right) = \left(m_3/s_{13}^3\right) : \left(m_3/s_{23}^3\right),$$

t. e.

$$s_{11}^3 = \left(s_{12}^3\, s_{13}^3\right) : s_{23}^3 .$$

Same oni trovos por s_{32}^3 kaj s_{33}^3 la analogajn esprimojn kaj la moviĝekvacioj (6) fariĝas

$$\ddot{\mathbf{s}}_1 = -f_0 s_{23}^3 \mathbf{g}_1, \quad \ddot{\mathbf{s}}_2 = -f_0 s_{13}^3 \mathbf{g}_2, \quad \ddot{\mathbf{s}}_3 = -f_0 s_{12}^3 \mathbf{g}_3, \tag{8}$$

$$f_0 = k^2 \cdot \frac{m_1 s_{23}^3 + m_2 s_{13}^3 + m_3 s_{12}^3}{(s_{12} s_{23} s_{13})^3}.$$

La kondiĉoj (7) reduktiĝas al

$$m_1 s_{23}^3 \mathbf{g}_1 + m_2 s_{13}^3 \mathbf{g}_2 + m_3 s_{12}^3 \mathbf{g}_3 = 0 \,. \tag{9}$$

Utiliginte $m_1 \mathbf{s}_1 + m_2 \mathbf{s}_2 + m_3 \mathbf{s}_3 = 0$ kaj la unuan ekvacion (5) ni tuj trovas

$$\Sigma (m_i \mathbf{g}_i) = -\mathbf{g} \Sigma m_i$$

kaj

$$\left(m_1 s_{23}^3 + m_2 s_{13}^3 + m_3 s_{12}^3\right) \mathbf{g} = m_1 s_{23}^3 \mathbf{s}_1 + m_2 s_{13}^3 \mathbf{s}_2 + m_3 s_{12}^3 \mathbf{s}_3 = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{\Sigma m_i} \Big[m_1 m_2 \mathbf{s}_{12} \left(s_{31}^3 - s_{23}^3\right) + m_2 m_3 \mathbf{s}_{23} \left(s_{12}^3 - s_{31}^3\right) +$$

$$+ m_3 m_1 \mathbf{s}_{31} \left(s_{23}^3 - s_{12}^3\right) \Big].$$

Ĉi tiu esprimo por la pozicio de la altircentro montras ke altircentro kongruas la mascentron kiam la inter-distancoj de tri korpoj reciproke egalas aŭ kiam la vektoroj $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$, samdirektas. Proksime de tiaj pozicioj $\mathbf{g}$ estos tre malgranda. Sed eblecoj por etaj grandecoj de la vektoro $\mathbf{g}$, aŭ pli difinite: ke $\mathbf{g}_i$ estu samdirektaj kun $\mathbf{s}_i$ (por unu i), estas multe pli diversaj. La esprimo (10) donas la pozicion $\mathbf{g}$ por ĉiu konkreta kazo de grandecoj kaj ordo de la masoj, kaj tiel oni povas vidi ĉu utilas serĉi la moviĝelementojn de du masoj ĉirkaŭ la tria.

3 El (4) oni tuj havas

$$[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}] = \mathbf{C} \tag{11}$$

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = m m_1 [\mathbf{r}\mathbf{r}_1] \left(\frac{\Upsilon}{r^3} - \frac{\Upsilon}{r_1^3}\right), \tag{12}$$

ĉee $\mathbf{C}$ estas des pli konstanta ju pli etan grandecon havas la dekstraflanka vektoro.

Plue oni havas

$$\Upsilon^{-1} (\mathbf{s}\dddot{\mathbf{s}}) = -\frac{m}{r^3} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{s}}) - \frac{m_1}{r_1^3} (\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{s}}) = -\frac{m^2}{r^2} r' - \frac{m_1^2}{r_1^2} r_1' -$$

$$- m m_1 [(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}_1) r^{-3} + (\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{r}}) r_1^{-3}].$$

Se oni enkondukas ĉi tie la signajojn μ kaj E tiaj ke

$$(13)\qquad \gamma\left(\frac{m^2}{r}+\frac{m_1^2}{r_1}\right)=\frac{\mu}{s},$$

$$(14)\qquad \frac{dE^2}{dt}=2mm_1\gamma\left[(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}_1)r^{-3}+(\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}})r_1^{-3}\right],$$

el la esprimo por $(\dddot{\mathbf{s}}\mathbf{s})$ oni trovas

$$(15)\qquad \dot{\mathbf{s}}^2=\frac{2\mu}{s}-E^2.$$

Ĉi tio estas la „integralo de viva forto“, en kui μ kaj E^2 ne estas konstantaj (al iliaj valoroj ni ankoraŭ revenos).

Utiligante (11) kaj (15) oni povas skribi

$$\frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{s}}\mathbf{C}]=[\ddot{\mathbf{s}}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]]+[\dot{\mathbf{s}}[\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}}]]=\mathbf{s}\left[2\frac{d(\mu/s)}{dt}-\frac{dE^2}{dt}\right]-\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}})-\ddot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}})=$$

$$(16)\qquad =\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\mathbf{s}}{s}\right)+\frac{d\mathbf{D}}{dt},$$

kie

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt}=\mathbf{s}\left[\left(\frac{\mu}{s}\right)'-\frac{dE^2}{dt}\right]-\frac{\mu\dot{\mathbf{s}}}{s}-\gamma\dot{\mathbf{s}}\left[mr^{-3}(\mathbf{r}\mathbf{s})+m_1r_1^{-3}(\mathbf{r}_1\mathbf{s})\right]-$$

$$-\ddot{\mathbf{s}}\left[m^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})+m_1^2(\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}}_1)+mm_1(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}_1+\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}})\right],$$

kio sekve de (13), kaj poste de (3), farigas

$$\dot{s}mm_1(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)\gamma(r^{-3}+r_1^{-3})-m^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})(\gamma r^{-3}\mathbf{s}-\ddot{\mathbf{s}})-$$

$$-m_1^2(\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}}_1)(\gamma r_1^{-3}\mathbf{s}-\ddot{\mathbf{s}})-mm_1(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)(2\gamma r_1^{-3}\mathbf{s}-\ddot{\mathbf{s}})-$$

$$-mm_1(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}_1)(2\gamma r^{-3}\mathbf{s}-\ddot{\mathbf{s}})=\dot{s}mm_1\gamma(r^{-3}+r_1^{-3})(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)-$$

$$-\left[m^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})m_1\mathbf{r}_1-m_1^2(\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}}_1)m\mathbf{r}\right]\gamma(r^{-3}-r_1^{-3})-$$

$$-mm_1[m_1\mathbf{r}_1(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}_1)-m\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}_1)]\gamma(r^{-3}-r_1^{-3}).$$

Ĉiuj membroj escepte la unuan donas kune

$$mm_1 \gamma (r^{-3} - r_1^{-3}) [\mathbf{r} (\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{s}}) - \mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \dot{\mathbf{s}})] = mm_1 \gamma (r^{-3} - r_1^{-3}) [\dot{\mathbf{s}} [\mathbf{r} \mathbf{r}_1]],$$

kaj pro (12) estos

$$\text{(17)} \qquad \frac{d\mathbf{D}}{dt} = mm_1 \gamma (\mathbf{r}\mathbf{r}_1)(r^{-3} + r_1^{-3}) \dot{\mathbf{s}} + \left[\dot{\mathbf{s}} \frac{d\mathbf{D}}{dt}\right].$$

Tiam el (16) senpere estas

$$\text{(18)} \qquad \mathbf{D} = [\dot{\mathbf{s}} \mathbf{C}] - \frac{\mu \mathbf{s}}{s},$$

kaj konsidere (17) oni povas skribi ankaŭ

$$\text{(19)} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{s}\left(\frac{\mu}{s} - E^2\right) - \dot{\mathbf{s}} (\mathbf{s} \dot{\mathbf{s}}),$$

de kie oni vidas ke, pro (17),

$$\text{(20)} \qquad (\mathbf{C}\mathbf{D}) = 0.$$

En (17) oni povas por $\dot{\mathbf{s}}$ utiligi la esprimon trovebla et (18):

$$C^2 \dot{\mathbf{s}} = \left[\mathbf{C}, \mathbf{D} + \frac{\mu \mathbf{s}}{s}\right].$$

La esprimo (18) analogas je la „Laplasa integralo“ el la dukorpa problemo. Por grandeco de la vektoro **D** oni povas per kvadratumo konstati ke

$$D^2 = \dot{\mathbf{s}}^2 C^2 - 2 \frac{\mu}{s} C^2 + \mu^2,$$

do sekve de (15)

$$\text{(21)} \qquad \mu^2 - D^2 = E^2 C^2,$$

kio montras ke ankaŭ μ estas des pli konstanta ju pli konstantaj estas C, D, E.

4 Krom la ligaĵoj (20) kaj (21) oni povas fari ankoraŭ kelkajn ligaĵojn ankaŭ samformaj kiel en la dukorpa problemo. Pro tio signu per η la angulon kiun faras la vektoro **s** kun la direkto de la vektoro **D**. Tiam et (18) sekvas

$$s.\, D.\, \cos \eta = (\mathbf{s}\mathbf{D}) = C^2 - \mu s, \quad \text{t. e.} \quad s(\mu + D \cos \eta) = C^2$$

aŭ

$$\text{(22)} \qquad s = \frac{p}{1 + e \cos \eta}, \qquad p = C^2/\mu, \; e = D/\mu.$$

Ĉi tio montras ke la mascentro de du korpoj moviĝas laŭ elipso kies parametro kaj necentrikeco ŝanĝiĝas, tiom kiom ŝanĝiĝas C, D, E. La vektoro $\mathbf{D}$ kongruas la direkton de la vektoro $\mathbf{s}$ en la momento kiam $\eta = 0$, t. e. ke $\mathbf{D}$ estas la „peri-helia vektoro“. Grandecon de la duonakso de la elipso ni trovos el grandecoj de la radiusoj por $\eta = 0$ kaj $\eta = \pi$, do

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2},$$

de kie, konsidere (22)

$$a = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2},$$

kio sekve de (21) ricevas la formon

(23) $$E^2 a = \mu .$$

De ĉi tie oni vidas ke ankaŭ la kvanto E^2 en (15) havas la saman signifon μ/a kian ĝi havas en la dukorpa problemo. Same estas

(24) $$p = \frac{\mu^2 - D^2}{E^2 \mu} = a(1-e^2) .$$

Se anstataŭ la angulo η ni enkondukos la novan varianton u, ligata kun η per la sama ligaĵo kiel ĉi du korpoj

(25) $$tg\frac{\eta}{2} = \alpha .\, tg\frac{u}{2}, \quad \alpha = \sqrt{(1+e):(1-e)}$$

tiam

(26) $$\cos\eta = \frac{1-(\alpha \operatorname{tg} u/2)^2}{1+(\alpha \operatorname{tg} u/2)^2} = \frac{1+\cos u - \alpha^2(1-\cos u)}{1+\cos u + \alpha^2(1-\cos u)} = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

(27) $$\sin\eta = \frac{2\alpha \operatorname{tg} u/2}{1+(\alpha \operatorname{tg} u/2)^2} = \frac{\alpha(1-e)\sin u}{(1-e)\cos^2(u/2)+(1+e)\sin^2(u/2)} =$$

$$= \frac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u} .$$

Per enkonduko de ĉi tiu varianto ni havos unue, el (22),

$$s = \frac{p(1-e\cos u)}{1-e^2} = a(1-e\cos u)$$

aŭ

(28) $$E^2 s = \mu - D\cos u .$$

El (18) ni havos plue $(\mathbf{sD}) = C^2 - \mu s$, kio kun (21) kaj (28) donas

$$(29) \qquad (\mathbf{s\,D}) = \frac{D(\mu \cos u - D)}{E^2}.$$

La samon ni trovas ankaŭ pere de (26). Sed se ni utiligas (27) kaj (28) ni havas

$$(\mathbf{s\,CD}) = s.\,C.\,D.\,\sin\eta = \frac{CD}{E^2}(\mu - D\cos u)\cdot\frac{\sin u\,\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u},$$

do

$$(30) \qquad (\mathbf{s\,CD}) = a\,CD\,\sqrt{1-e^2}\,\sin u = \frac{C^2 D}{E}\sin u\cdot$$

Aliflanke (18) donas

$$(\mathbf{s\,CD}) = (\mathbf{s\dot{s}})\,C^2,$$

kio tuj donas

$$(31) \qquad (\mathbf{s\dot{s}}) = \frac{D}{E}\sin u\cdot$$

5 Ĉiuj-ĉi rilatoj estas la samaj kiel en la dukorpa problemo (v. ekz. [3]) kaj ili ebligas tujan eltrovon de la pozicivektoro **s** kiel

$$\mathbf{s} = \frac{(\mathbf{s\,D})}{D^2}\,\mathbf{D} + \frac{(\mathbf{s\,CD})}{C^2 D^2}[\mathbf{CD}],$$

t. e.

$$(32) \qquad \mathbf{s} = \frac{\mu\cos u - D}{E^2 D}\,\mathbf{D} + \frac{\sin u}{ED}[\mathbf{CD}] = a(\cos u - e)\,\mathbf{d} +$$

$$+ a\sqrt{1-e^2}\,\sin u\,[\mathbf{cd}]\cdot$$

La esprimon por la moviĝrapido de la mascentro ni trovos kiam ni diskomponos la rapidon laŭ **D** kaj **[CD]**. El (18) kaj (31) ni havas

$$(\dot{\mathbf{s}}\,\mathbf{D}) = -\frac{\mu}{s}(\mathbf{s\dot{s}}) = -\frac{\mu D}{sE}\sin u,$$

kaj el (19), (11) kaj (28)

$$(\dot{\mathbf{s}}\,\mathbf{CD}) = C^2\cdot\frac{\mu - E^2 s}{s} = \frac{C^2 D}{s}\cos u,$$

kaj do

$$(33) \qquad \dot{\mathbf{s}} = -\frac{\mu}{sDE}\sin u\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{sD}\cos u\cdot[\mathbf{CD}] = -\frac{1}{s}\cdot\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin u\cdot\mathbf{d} +$$

$$+\frac{\sqrt{\mu\,a(1-e^2)}}{s}\cos u\,[\mathbf{cd}]\cdot$$

La lasta esprimo, komparita kun (32), donas la varion de la vektoro **s** pro nur elementŝanĝoj (sen tempoŝanĝo) en la formo

$$\delta \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u}\left(\frac{E}{s} - \frac{\partial u}{\partial t} dt\right). \tag{34}$$

Restas ankoraŭ fiksi kiel la varianto u dependas de tempo. Pro tio ekiru de (31) kaj (28), nome

$$\frac{D}{E} \sin u \,.\, dt = (\mathbf{s}\, d\mathbf{s}) = E^{-2} s\,(d\mu - \cos u \,.\, dD + D \sin u \,.\, du - s \,.\, dE^2) =$$

$$= \mu E^{-2} D \sin u \,.\, d\left(u - \frac{D}{\mu} \sin u\right) +$$

$$+ E^{-2}\left[s\, d\mu - s \,.\, \cos u \,.\, dD - s^2\, d E^2 + \mu E^{-2} \,.\, D \sin^2 u \,.\, d\left(\frac{D}{\mu}\right)\right].$$

Se ni difinos la kvanton T tiel ke

$$u - \frac{D}{\mu} \sin u = \int_T^t \frac{E^3}{\mu} \cdot dt, \tag{35}$$

t. e. se ni starigos la Kepleran ekvacion en la formo konvena por perturbata moviĝo (v. [2]), tiam ni havos

$$\frac{E^3}{\mu} \cdot d\,T = \frac{E^2}{\mu D \sin u}\left[\left(s - \frac{D^2 \sin^2 u}{\mu E^2}\right) d\mu - \right.$$

$$\left. - \frac{E^2 s \,.\, \cos u - D \sin^2 u}{E^2}\, dD - s^2\, d E^2\right],$$

aŭ, utiligante (21) kaj (28), kaj poste (29) kaj (30),

$$E^3 d\,T = \frac{1}{D \sin u}\left[(\mu^2 - \mu D \cos u - D^2 + D^2 \cos^2 u)\frac{d\mu}{\mu} - \right.$$

$$\left. - (\mu \cos u - D)\, d\,D - E^2 s^2\, d\,E^2\right] =$$

$$= \frac{E^2}{D \sin u}\left[(C^2 - s\, D \cos u)\frac{d\mu}{\mu} - \frac{(\mathbf{s}\mathbf{D})}{D} dD - s^2\, d\,E^2\right],$$

kio definitive donas

$$E^2 \cdot \frac{d\,T}{dt} = \frac{C^2}{(\mathbf{s}\,\mathbf{C}\mathbf{D})}\left[(\mathbf{s}\,\mathbf{D} + E^2 s^2)\frac{d\mu}{\mu\, d\,t} - \frac{\mathbf{s}\,\mathbf{D}}{D} \cdot \frac{dD}{d\,t} - s^2 \cdot \frac{d\,E^2}{d\,t}\right]. \tag{36}$$

La esprimon por $\frac{d\mu}{dt}$ ni trovos el (21), kaj la aliajn derivojn oni havas en (12) (15) kaj (17).

Ĉar, laŭ (25), $u = 0$ por $\eta = 0$, kiun solvon oni atingas eniginte $t = T$ en (35), sekvas ke T havas signifon de la tempo kiam la mascentro trapasas sian „perihelion" kaj la ekvacio (36) servas por ĝia determino kiam D, μ kaj Evarias.

6 La kvantoj **C**, **D**, T, estas t. n. vektoraj elementoj en la dukorpa problemo (v. ekz. [1] aŭ [3]. Iliajn konstantajn partojn oni povas trovi el la ekaj kondiĉoj pere de (11), (13), (18), E^2 el (21), tiam u el (28) helpe de (31), kaj fine T el (35) en la formo

$$E^3 (t_0 - T) = (\mu u - D \sin u)_0.$$

Ekde tiuj unuaj valoroj oni povas serĉi iliajn „perturbojn" el la ekvacioj (12), (17) kaj (36). Eltrovante la „perturbojn" oni kalkulos **r** kaj $\mathbf{r}_1$ (en la integraloj) pere de la neperturbataj elementoj, nome la elementoj kiujn oni havus neglektante la etajn membrojn en la moviĝekvacioj. Ĉi tio eblos ĉu en moviĝekvacioj ĉirkaŭ la ĉefa korpo (kiam la masoj de aliaj du korpoj estas malgrandaj), ĉu en la ekvacio (8) por la moviĝo ĉirkaŭ la mascentro (t. e. kiam la altircentro troviĝas proksime de la mascentro), ĉu ja en la ekvacio por moviĝo ĉirkaŭ la mascentro de du korpoj (kiam ili tre proksimas unu la alian, malproksime de la ĉefkorpo, kaj iliaj masoj ne estas neglektindaj) kaj simile. En plej malfavora okazo oni devus, post la unuarangaj perturboj, reveni al la moviĝekvacioj kaj serĉi la duarangajn perturbojn.

LA MENCIITA LITERATURO:

[1] *Milanković M.:* „Nebeska Mehanika", Beograd 1935.

[2] *Popović B.:* „Nouvelle méthode pour obtenir les équations des perturbations des éléments elliptiques" MÉMOIRES, V, de l'Observatoire astronomique de Belgrade, 1949 pp. 11—25).

[3] *Popović B.:* „Les équations nouvelles des perturbations dans le mouvement des planètes" (BULLETIN de l'Académie serbe des sciences, Tome V, p. 123); „Novi oblici jednačina poremećaja . . ." GLAS Srp. Akad. nauka, CXCVIII, str. 129— 139).

ВЕКТОРСКИ ЕЛЕМЕНТИ НА ЕЛИПТИЧНО ДВИЖЕНИЕ НА ТЕЖИШТЕТО ОД ДВЕ ТЕЛА ОКОЛУ ТРЕТО

Поповиќ Божидар, (Сарајево)

Кога две тела се движат околу трето, тогаш за движението на нивното тежиште се дадени векторските елементи C, D, T (в. [1] или [3]), со помошта на кои движението на тежиштето се изразува во ист облик како и во случајот на две тела, со таа разлика што елементите не се константни, туку задоволуваат некои диференцијални равенки. Нека m и m_1 се релативните маси на двете тела (во однос на нивниот збир), M масата на главното тело, r, r_1, s, положенијата на овие две тела и на нивното тежиште, во однос на главното тело. Тогаш улогата на „интеграли" ја имаат (11), (18) и (35), а при тоа елементите ги задоволуваат диференцијалните равенки (што имаат улога на равенки на пертурбации) (12), (17) и (36) — со помошт на (14). Од интерес е и „интегралот на живата сила" (15) со променливите μ и E^2, кои ги задоволуваат равенките (21) и (14), односно (23). Исто така од интерес се и другите врски аналогни на проблемот од две тела: (22), (23), (24), (28), (31) и др.

Изразот (10) го дава положението на центарот на атракцијата ([1], стр. 78) на три тела, g, изразен со помошта на релативните положенија s_{ij} на трите тела или со помошта на навните положенија s_i спрема тежиштето. Тој израз овозможува да се испита поблиско, во секој конкретен случај, дали вреди да се бараат елементите на тежиштето на две тела што се вртат околу трето.