# SUR UNE CONGRUENCE

**Olga Mitrinović**

*Dans cette petite Note nous allons démontrer que le nombre*

$$p^5 q - pq^5 \quad (p, q \text{ nombres naturels})$$

*est divisible par 30.*

1. Prenons, tout d'abord, le nombre $p^5 - p$, écrit sous la forme

$$(E) \qquad (p-1)\, p\,(p+1)\,(p^2+1),$$

correspondant à $q = 1$.

Le produit $(p-1)\, p\,(p+1)$ de trois nombres consécutifs est toujours divisible par 6.

Dans le cas où

$$p = 5\,N + r, \; (N \text{ nombre naturel, } r = 0,\, 1,\, 4)$$

le produit

$$(p-1)\, p\,(p+1)$$

est toujours divisible par 5.

Pour démontrer que l'expression $(E)$ est divisible par 30, pour $p$ nombre naturel quelconque, il reste encore à faire voir que le nombre $p^2+1$ est divisible par 5 toutes les fois où $p$ a la forme

$$p = 5\,N + 2, \text{ ou } p = 5\,N + 3.$$

En effet, $p^2+1$ dans ces cas devient respectivement

$$p^2 + 1 = 25\,N^2 + 20\,N + 5 \; = 5\,(5\,N^2 + 4\,N + 1),$$

$$p^2 + 1 = 25\,N^2 + 30\,N + 10 = 5\,(5\,N^2 + 6\,N + 2).$$

Avec ceci, nous avons complètement démontré la congruence:

$$p^5 - p \equiv 0 \pmod{30}.$$

**2.** Considérons maintenant le nombre

$$S(p, q) = p^5 q - pq^5$$

défini au début de cette Note.

Formons $S(p, q+1)$, à savoir

$$\begin{aligned} S(p, q+1) &= p^5 (q+1) - p(q+1)^5 \\ &= S(p, q) + p^5 - 5pq^4 - 10pq^3 - 10pq^2 - 5pq - p \\ &= S(p, q) - 5pq(q^3 + 2q^2 + 2q + 1) + (p^5 - p). \end{aligned}$$

Chaque nombre naturel $q$ peut être écrit sous la forme

$$q = 6n + s \quad (n \text{ nombre naturel; } s = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Le nombre

$$\begin{aligned} R(q) &= q(q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \\ &= q(q+1)(q^2 + q + 1) \end{aligned}$$

est toujours divisible par 6.

En effet, à $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ correspondent respectivement les nombres:

$$\begin{gathered} 6n(6n+1)(36n^2 + 6n + 1), \\ (6n+1)(6n+2)(36n^2 + 18n + 3), \\ (6n+2)(6n+3)(36n^2 + 30n + 7), \\ (6n+3)(6n+4)(36n^2 + 42n + 13), \\ (6n+4)(6n+5)(36n^2 + 54n + 21), \\ (6n+5)(6n+6)(36n^2 + 66n + 31). \end{gathered}$$

Les six nombres précédents tous sont divisibles par 6.

Etant donné que $S(p, 1)$ et $5R(q)$ sont divisibles par 30, le nombre $S(p, q+1)$ est divisible par 30, s'il en est ainsi de $S(p, q)$. On en tire que $S(p, q)$ est divisible par 30 toutes les fois où $p$ et $q$ désignent des nombres naturels.

**3.** On peut démontrer la congruence

$$p^5 q - pq^5 \equiv 0 \pmod{30}$$

en se servant exclusivement de l'induction complète, ce que nous allons faire voir dans la suite.

Si $M_5(p) = p^5 - p$, formons

$$M_5(p+1) = M_5(p) + 5p\ (p^3 + 2p^2 + 2p + 1).$$

Formons ensuite $M_4(p+1)$, où

$$M_4(p) = p(p^3 + 2p^2 + 2p + 1).$$

On a alors

$$M_4(p+1) = M_4(p) + 2(2p^3 + 6p^2 + 7p + 3).$$

Enfin, formons $M_3(p+1)$, où

$$M_3(p) = 2p^3 + 6p^2 + 7p + 3.$$

On obtient, dans ce cas,

$$M_3(p+1) = M_3(p) + 3(2p^2 + 6p + 5).$$

Mettant à profit les résultats précédents, on peut faire les conclusions suivantes:

Dans le cas où $M_3(p)$ est divisible par 3, il en sera de même de $M_3(p+1)$. Étant donné que $M_3(1)$ est divisible par 3, il s'ensuit que $M_3(p)$ est divisible par 3, pour $p$ nombre naturel quelconque.

Puisque

$$M_4(p+1) = M_4(p) + 2M_3(p),$$

le nombre $M_4(p+1)$ est divisible par 6, s'il en est ainsi de $M_4(p)$. Étant donné que $M_4(1)$ est divisible par 6, il vient que $M_4(p)$ est divisible par 6 pour tout nombre naturel $p$.

Vu que

$$M_5(p+1) = M_5(p) + 5M_4(p),$$

on conclut que $M_5(p+1)$ est divisible par 30, s'il en est de même avec $M_5(p)$. Puisque le nombre $M_5(1)$ est divisible par 30, on peut affirmer que $M_5(p)$ est divisible par 30, pour tout nombre naturel $p$.

Tenant compte des faits indiqués au paragraphe 2 de cette Note, on voit que, par l'application exclusive de l'induction complète, on démontre la congruence

$$p^5q - pq^5 \equiv 0 \pmod{30}.$$

Malgré le caractère élémentaire de cette Note, les démonstrations données, il nous semble, ne sont pas dénuées de quelque intérêt, au moins, au point de vue méthodique.

4. On démontre sans difficulté, que le nombre $S(p, q)$ est divisible également par 30, si les $p$ et $q$ sont des nombres entiers quelconques.

---

*Rezime*


## O JEDNOJ KONGRUENCIJI

Olga Mitrinović

**Zaključkom od $n$ na $n+1$ dokazan je stav:**

*Ako su p i q celi brojevi, tada je*

$$p^5 q - pq^5 \equiv 0 \pmod{30}.$$

Bez primene matematičke indukcije dokaz bi bio znatno duži.


---